Modélisation des systèmes complexes

M. Petitot

31 août 2004

Table des matières

Introduction

Les deux premiers chapîtres de ce cours d'*introduction à la modèlisation des réseaux* sont dédiés à l'étude du rendement des architectures "clients–serveurs". On étudie, en particulier, les lois de probabilité qui gouvernent l'arrivée des clients, le temps de service, le nombre de clients en attente dans le système, le nombre de clients servis etc. Une application classique est le dimensionnement des composants d'un réseau de communication: les décisions sont prises sur la base de la qualité de service obtenue (temps moyen de service d'un client, nombre moyen de clients en attente etc) en fonction de la puissance des matériels utilisés. Cette étude de rentabilité d'un inverstissement est menée, soit par le calcul, soit par la simulation mais dans tous les cas, il est illusoire de comprendre les résultats d'un logiciel sans un minimum de compréhension des concepts théoriques à mettre en oeuvre.

La formule B (respectivement C) de Erlang est particulièrement utile en téléphonie car elle permet de calculer le pourcentage de clients perdus (respectivement qui doivent attendre) en fonction des resources matérielles disponibles et des lois de probabilités gouvernant les processus d'arrivée et de service des clients.

Pour en comprendre la signification, on introduit dans le premier chapitre, le formalisme des chaînes de Markov, en insistant particulièrement sur le calcul matriciel nécessaire pour obtenir sur ordinateur les caractéristiques du *régime stationnaire*. Le point clé de ce chapitre est l'étude du *processus de naissance et de mort* ainsi nommé parce qu'il permet d'analyser l'évolution d'une population [1].

Dans le deuxième chapitre, on étudie les systèmes d'attente pour lesquels l'entrée des clients est un processus de Poisson et le temps de service suit une loi exponentielle. On montre que le nombre des clients qui demandent un service suit "naturellement" la loi de Poisson. Par contre, le choix d'un temps de service distribué selon la loi exponentielle tient en grande partie à la simplicité que ce choix introduit dans les formules obtenues.

Il est grandement conseillé aux étudiants de programmer sur ordinateur les principales formules rencontrées.

Je n'ai pas encore rédigé le chapitre portant sur la *sûreté de fonctionnement* des systèmes complexes. Cette sûreté de fonctionnement d'un système est principalement caractérisée par

1. sa *disponibilité* à l'instant t, i.e. la probabilité que ce système fonctionne correc-

1. C'est bien connu, les gens naissent et meurent, le coté aléatoire de cet aspect des choses n'ayant toujours pas disparu malgré d'intenses activités de recherche dans le domaine.

tement à l'instant t.

2. sa *fiabilité* i.e. la loi de probabilité qui gouverne la durée de bon fonctionnement du système. Un système est d'autant plus fiable que sa durée *moyenne* de bon fonctionnement est grande.
3. sa *maintenabilité* i.e. la loi de probabilité qui gouverne la durée de la remise en état du système en cas de panne. Un système est d'autant plus maintenable que cette durée moyenne de remise en état est faible.

Il est remarquable que la théorie des chaînes de Markov permette de mettre en place le calcul des caractéristiques de sécurité (disponibilité, fiabilité, maintenabilité) d'un système complexe en fonction des caractéristiques de sécurité des composants élémentaires utilisés. Ce calcul dépend évidemment de l'agencement de ces divers composants.

J'ai mis en annexe un certain nombre de résultats classiques sur les variables aléatoires, la transformée en z, la transformée de Laplace etc. Ces outils théoriques qui sont sont au coeur des "sciences de l'ingénieur" sont utilisés dans des domaines très variés: traitement du signal, automatique, analyse et compression d'image. Ils ne font pas partie du programme du module MSC. On pourra simplement s'y reporter en cas de besoin.

Chapitre 1

Initiation aux chaînes de Markov

1.1 Chaîne de Markov en temps discret

1.1.1 Définitions de base

1.1.1.1 Vecteur et matrice stochastique

Un vecteur (ligne) formé de nombres réels $\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n)$ est appelé *stochastique* si et seulement si

- toutes ses composantes sont positives ou nulles i.e. $\pi_i \geq 0$ pour $0 \leq i \leq n$.
- la somme de ses composantes est égale à un i.e. $\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1$.

Une matrice carrée $P = (P_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ est appelée stochastique si chacune de ses lignes est un vecteur stochastique.

Exemple 1.1

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Proposition 1.1 *Le produit d'un vecteur (ligne) stochastique par une matrice stochastique est un vecteur (ligne) stochastique. Le produit de deux matrices stochastiques est une matrice stochastique.*

Exercice 1.1 Vérifier sur un exemple puis faire la preuve.

1.1.1.2 Définition d'un processus aléatoire

Informellement, un *processus aléatoire* est un système dynamique dont l'état évolue au cours du temps de manière aléatoire. Dans la suite, l'état de ce système est un nombre entier compris entre 0 et n. Le temps t est supposé *discret*, ce qui signifie que t est un entier positif ou nul.

Soit $X(t)$ l'état du système à l'instant t. Il faut considérer $X(t)$ comme une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble des entiers. On note $\pi_i(t)$ la probabilité pour que le système considéré soit dans l'état i à l'instant t, autrement dit $\pi_i(t) = \text{Prob}\,\{X(t) = i\}$. A tout instant t, le vecteur

$$\pi(t) = (\pi_0(t),\pi_1(t),\ldots,\pi_n(t))$$

est donc un vecteur stochastique. Un processus $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ est une famille de variables aléatoires indicées par le temps $t \in \mathbb{N}$. En pratique, un processus est défini par l'application $t \to \pi(t)$.

1.1.1.3 Définition d'une chaîne de Markov homogène dans le temps

On supposera que le système transite de l'état i à l'état j avec une probabilité P_{ij} qui ne dépend que des états i et j. Un tel système est dit *sans mémoire* ou encore *markovien*, ce qui signifie que la probabilité P_{ij} ne dépend pas des états antérieurs à i par lesquels le système est passé au cours de son histoire. Ainsi le *futur* état du système étudié dépend uniquement de son état *présent* et non des ses états passés.

Ces nombres P_{ij} sont rangés dans la matrice $P = (P_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$. Cette matrice est stochastique car le vecteur (stochastique) en ligne i contient les probabilités de toutes les transitions possibles en partant de l'état i et par suite leur somme est égale à un.

La suite des vecteurs stochastiques $\pi(t)$ pour $t = 0,1,2,\cdots$ vérifie la formule de récurrence matricielle :

$$\Big(\pi_0(t+1),\pi_1(t+1),\,\ldots,\pi_n(t+1)\Big) = \Big(\pi_0(t),\pi_1(t),\ldots,\pi_n(t)\Big)\begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & \cdots & P_{0,n} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & \cdots & P_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ P_{n,0} & P_{n,1} & \cdots & P_{n,n} \end{pmatrix}$$

que l'on écrit sous forme plus compacte :

$$\boxed{\pi(t+1) = \pi(t)\ P} \qquad (t \in \mathbb{N}) \tag{1.2}$$

Définition 1.1 (chaîne de Markov) *Une chaîne de Markov homogène dans le temps est la donnée d'une suite de vecteurs stochastiques $\{\pi(t)\}_{t\in\mathbb{N}}$ et d'une matrice stochastique P telle que pour tout $t \in \mathbb{N}$, $\pi(t+1) = \pi(t)\ P$.*

La chaîne est dite *homogène* dans le temps parce que la matrice P ne dépend pas du temps t.

Exemple 1.2 (Deux machines non réparables) *Soit un dispositif comprenant deux éléments fonctionnant indépendamment l'un de l'autre. Chaque élément a une fiabilité égale à p au cours d'une journée, ce qui signifie que la probabilité de tomber en panne pendant cette période est $1-p$. Il n'y a pas de possibilité de réparation. Au départ, les deux éléments du dispositif fonctionnent correctement.*

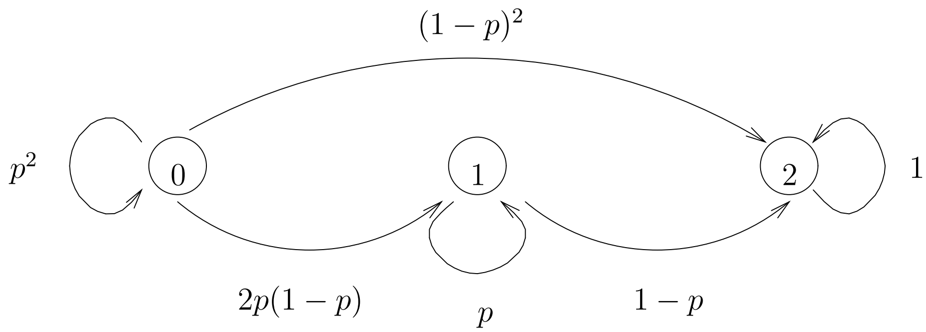

FIG. 1.1 – *Graphe de transition pour l'exemple 1.2*

Notre processus sera dans l'état 0,1 ou 2 selon qu'il y a 0,1 ou 2 éléments en panne en *début* de journée. Les diverses transitions (et leurs probabilités) sont représentées par le graphe de la figure 1.1.

A ce graphe est associée la matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} \\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} \\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 2p(1-p) & (1-p)^2 \\ 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Exemple 1.3 (Deux machines réparables) *On modifie les hypothèses de l'exemple 1.2 comme suit. Dans le cas ou une machine tombe en panne pendant la journée, elle est réparée dans la nuit et se retrouve donc en état de marche le lendemain. On ne peut pas réparer plus d'une machine dans la nuit.*

Exercice 1.2 En remarquant qu'il y a 0 ou 1 machine en panne au début de la journée (état du système), tracer le graphe de transition et montrer que la matrice de transition vaut

$$P = \begin{pmatrix} p(2-p) & (1-p)^2 \\ p & 1-p \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

1.1.2 Evolution dans le temps du vecteur stochastique

1.1.2.1 équations d'état

La formule de récurrence $\pi(t+1) = \pi(t)\ P$ appliquée aux instants $t = 0{,}1{,}2,\cdots$, donne :

$$\begin{aligned} \pi(1) &= \pi(0)\ P \\ \pi(2) &= \pi(1)\ P = \pi(0)\ P^2 \\ \pi(3) &= \pi(2)\ P = \pi(0)\ P^3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

A tout instant t (entier), le vecteur stochastique est donc

$$\boxed{\pi(t) = \pi(0)\ P^t} \tag{1.5}$$

1.1.2.2 Calcul de la puissance d'une matrice

Le calcul de la puissance d'une matrice peut se faire de manière itérative par la formule $P^t = P \cdot P^{t-1}$ pour $t > 0$. Lorsque la valeur de t est grande, il est plus rapide d'utiliser la relation $P^t = \left(P^2\right)^{t/2}$ lorsque t est un entier pair. A chaque passage dans la boucle de calcul, la valeur de l'exposant t est divisée par deux. Lorsque t a une valeur impaire, on se ramène au cas pair en décrémentant t.

Une deuxième méthode est basée sur le calcul des *valeurs propres* de P. Lorsque P est une matrice *diagonale*

$$D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),$$

l'élévation à la puissance k est facile. La matrice D^k est encore diagonale et l'on a pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$D^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k).$$

Si ce n'est pas le cas, il existe général une matrice invertible Q (dite matrice de passage) telle que $P = Q \cdot D \cdot Q^{-1}$, où D est une matrice diagonale. On en déduit que

$$P^k = Q \cdot D^k \cdot Q^{-1},$$

ce qui nous ramène au calcul précèdent. Les nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont appelées les valeurs propres de la matrice P.

1.1.2.3 Utilisation de la "transformée en z"

Nous allons appliquer la transformée en z définie en section A.2.4.1 à chaque composante du vecteur stochastique $\pi(t)$. Pour i fixé, la probabilité $\pi_i(t)$ est vue comme une suite de nombres indicée par l'entier t dont la transformée en z est notée $\widehat{\pi}_i(z)$. On pose

$$\widehat{\pi}(z) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\pi}_1(z), \widehat{\pi}_2(z), \dots, \widehat{\pi}_n(z)).$$

L'équation d'état (1.5) devient

$$(\sigma\pi)(t) = \pi(t)\ P.$$

En calculant la transformée en z de chacun des deux membres, compte–tenu du shift en partie gauche, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{z}(\widehat{\pi}(z) - \pi(0)) &= \widehat{\pi}(z)\ P, \\ \widehat{\pi}(z) &= \pi(0) + z\ \widehat{\pi}(z)\ P, \\ (\mathrm{Id} - zP)\ \widehat{\pi}(z) &= \pi(0), \end{aligned}$$

ce qui donne finalement

$$\boxed{\widehat{\pi}(z) = \pi(0)\ (\mathrm{Id} - zP)^{-1}.} \tag{1.6}$$

1.1.3 Distribution limite

On constate souvent que la distribution $\pi(t)$ converge vers une *distribution limite* notée $\pi(\infty)$ lorsque t tend vers l'infini. La recherche des conditions de convergence constitue une chapître important de la théorie des chaînes de Markov qui dépasse de loin le but de cette modeste introduction. Citons cependant, sans en faire la démonstration, une condition *suffisante* pour que distribution limite existe et ne dépende pas de la distribution initiale $\pi(0)$. Il suffit qu'au moins une puissance de la matrice de transition P n'ait que des composantes strictement positives, ce qui signifie que le processus, étudié pendant un temps suffisamment long, peut transiter, avec une probabilité strictement positive, entre deux états quelconques. Plus précisément, on a le théorème suivant.

Théorème 1.1 *Si une certaine puissance de la matrice de transition P n'a que des composantes strictement positives, alors*

1. *il existe une distribution* limite $\pi(\infty)$ *dont toutes les composantes sont strictement positives et telle que $\pi(t) \to \pi(\infty)$ lorsque $t \to \infty$ qui est indépendante du vecteur stochastique initial $\pi(0)$.*
2. *la suite des matrices P^t lorsque $t \to \infty$ converge vers la matrice P^∞ dont toutes les lignes sont égales au vecteur $\pi(\infty)$. De plus, la distribution $\pi(\infty)$ est* stationnaire *i.e. $\pi(\infty) = \pi(\infty)\ P$.*

Preuve – admise. □

Exercice 1.3 En calculant P^2, démontrer que la matrice P définie par l'équation (1.1) vérifie les conditions du théorème 1.1. A l'aide d'un ordinateur, calculer la distribution limite π.

Exercice 1.4 On considère la matrice P définie par l'équation (1.3) qui est triangulaire supérieure. En remarquant que toutes les puissances de P sont triangulaires supérieures, démontrer que la matrice P ne vérifie pas les conditions du théorème 1.1. Démontrer que la distribution limite existe néanmoins. Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 1.5 On considère la matrice P définie par l'équation (1.4). Cette matrice vérifie–t'elle les conditions du théorème 1.1? A l'aide d'un ordinateur, calculer la distribution limite pour quelques valeurs de p convenablement choisies. Interpréter les résultats obtenus.

Exercice 1.6 Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que pour $\pi(0) \neq (1/2{,}1/2)$, la limite de $\pi(t)$ lorsque $t \to \infty$ n'existe pas.

1.1.4 Distribution stationnaire

Une distribution (vecteur stochastique) $\pi = (\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_n)$ est dite *stationnaire* par rapport à la matrice stochastique P si et seulement si elle est constante dans le temps i.e.

$$\boxed{\pi = \pi\ P} \tag{1.7}$$

Cette condition s'écrit de manière équivalente $\pi\ (P - \mathrm{Id}) = 0$. Elle traduit le fait que si la chaîne de Markov est initilisée avec la distribution $\pi(0) = \pi$, alors le vecteur stochastique $\pi(t)$ est constant pour $t = 0,1,2,\ldots$.

Exemple 1.4 Soit la matrice stochastique

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

Le calcul se fait en résolvant le système linéaire (1.7). Les équations linéaires de ce système ne sont pas linéairement indépendantes car en les additionnant membre à membre, on obtient l'identité triviale $1 = 1$. Il faut donc complèter ces équations par la condition $\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1$, ce qui donne sur l'exemple (1.8) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{1}{2}\pi_0 + \pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 & = & \pi_0 \\ \frac{1}{4}\pi_2 & = & \pi_1 \\ \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_2 & = & \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 & = & 1 \end{array} \right. \tag{1.9}$$

Les calculs donnent $\pi = (4/9, 1/9, 4/9)$.

Exercice 1.7 Calculer la distribution stationnaire pour la matrice P définie par l'équation (1.1).

1.1.4.1 Equations de la balance

On peut générer les équations vérifiées par la distribution stationnaire sans passer par le formalisme matriciel mais en partant de la description de la chaine par un *automate*. On peut "imaginer" que les noeuds du graphe sont des "châteaux d'eau" et que dans les canalisations (flèches) circule de l'eau dont le débit est proportionnel au niveau d'eau du château en amont et de la capacité de la canalisation (probabilité inscrite sur la flèche). Il est alors *évident* que le niveau d'eau d'un château est stationnaire si et seulement si le débit entrant est égal au débit sortant. Ces équations s'appellent *équations de la balance* et sont équivalentes aux équation (1.7).

Exercice 1.8 Vérifier que la distribution stationnaire pour la matrice P définie par l'équation (1.4) est

$$\pi = \left(\frac{p}{1 - p + p^2}, \frac{(1-p)^2}{1 - p + p^2} \right) \tag{1.10}$$

Exercice 1.9 Vérifier que l'unique distribution stationnaire pour la matrice P définie par l'équation (1.3) lorsque $0 < p < 1$ est

$$\pi = (0,0,1) \tag{1.11}$$

1.1.4.2 Existence et unicité des distributions stationnaires

Théorème 1.2 *Une chaîne de Markov* finie *admet au moins une distribution stationnaire, ce qui n'est plus nécessairement vrai si l'espace des états est* infini.

Preuve – admise. □

Théorème 1.3 *Si la distribution* limite $\pi(\infty) = \lim_{t\to\infty} \pi(t)$ *d'une chaîne de Markov existe et ne dépend pas du vecteur stochastique initial, alors* $\pi(\infty)$ *est l'unique distribution* stationnaire *de cette chaîne.*

On peut montrer que dans ce cas, le système est *ergodique*, ce qui signifie que le pourcentage de temps passé par le processus étudié dans un état donné (sur un longue période de temps) est égal à la probabilité stationnaire de cet état.

1.1.5 Temps de séjour dans un état

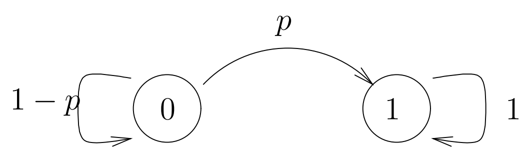

Fig. 1.2 – *Loi géométrique*

Nous allons traiter le cas le plus simple, à savoir la chaîne à deux états comme dans la figure 1.2. Soit T le temps aléatoire pendant lequel le processus séjourne dans l'état 0. Montrons que ce temps T est une v.a. distribuée selon la loi géométrique (voir A.16). On a

$$\begin{aligned}
p_1 := \text{Prob}\,\{T = 1\} &= p \\
p_2 := \text{Prob}\,\{T = 2\} &= (1-p)p \\
p_3 := \text{Prob}\,\{T = 3\} &= (1-p)^2 p \\
&\vdots \\
p_k := \text{Prob}\,\{T = k\} &= (1-p)^{k-1} p \text{ pour tout } k \geq 1.
\end{aligned}$$

La moyenne de la v.a. T est la moyenne des valeurs k pondérée par les probabilités p_k soit

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(T) &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1} p \\
&= p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}.
\end{aligned}$$

En posant $z = 1 - p$, la somme à évaluer est de la forme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} &= \frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^k \\
&= \frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} \\
&= \frac{1}{(1-z)^2}
\end{aligned}$$

On trouve finalement, en tenant compte que $z = 1 - p$:

$$\boxed{\mathrm{E}(T) = \frac{1}{p}} \tag{1.12}$$

Cette formule est trés intuitive. Une personne qui a une chance sur quatre de réussir l'examen du permis de conduire devra en moyenne le passer quatre fois.

Dans le cas d'une chaine de Markov quelconque, le calcul du temps de séjour dans l'état i est à peine plus compliqué. Il suffit de regrouper toutes les flèches sortantes de l'état i en une seule affectée de la probabilité $p = \sum_{j \neq i} P_{i,j} = 1 - P_{i,i}$. On a donc démontré le

Théorème 1.4 *Soit p la la probabilité de sortir d'un certain état pendant une unité de temps. Pour le processus markovien considéré, le temps de séjour T dans cet état est distribué selon la loi géométrique de moyenne $1/p$:*

$$\mathrm{Prob}\,\{T = k\} = (1-p)^{k-1} p, \qquad (k \geq 1).$$

Exercice 1.10 Une route comprend 4 pistes. Chacune d'entre elles peut être traversée en une seconde. La probabilité pour qu'une automobile arrive pendant une seconde déterminée est 0,8. Quelle est pour un piéton la probabilité de traverser en 4 secondes, 5 secondes, 6 secondes, etc ...

1. Faire le graphe du système.
2. Donner la matrice de transition.
3. Calculer le temps moyen pour traverser les 4 pistes.

Exercice 1.11 On étudie le fonctionnement d'une imprimante. Celle-ci peut être dans 3 états distincts:

Etat 1 attente d'un caractère à imprimer,
Etat 2 impression d'un caractère,
Etat 3 interruption après avoir reçu un caractère de contrôle.

Lorsque l'imprimante est en attente, elle reçoit un caractère à imprimer avec la probabilité 0,80.

Lorsqu'elle est en impression elle reçoit:

– un caractère *normal* avec la probabilité 0,95 (caractère courant du fichier à imprimer) ;

– un caractère de *fin de fichier* avec la probabilité 0,04 (l'imprimante retourne dans l'état d'attente) ;
– un caractère d'*interruption* avec la probabilité 0,01 (l'imprimante passe alors dans l'état 3).

Lorsque l'imprimante est dans l'état 3, elle retourne dans l'état d'attente avec la probabilité 0,3 sinon elle reste dans l'état 3.

1. Montrez que ce système se modélise par un chaîne de Markov à 3 états.
2. Dessinez le graphe associé à cette chaîne et donnez sa matrice de transition.
3. Quel est le temps moyen d'une interruption?
4. Ecrivez les équations d'équilibre et montrez que cette chaîne est ergodique. Calculez les probabilités stationnaires associées.
5. En régime stationnaire, quel est le taux d'utilisation de l'imprimante?

Exercice 1.12 Un installateur d'ascenseurs dispose d'une seule équipe dont tous les membres travaillent sur le même chantier. Les demandes d'installations des clients qui lui parviennent peuvent être réparties en 2 classes:

– travaux de moyenne importance, durant une semaine (désignés par A).
– travaux plus importants durant 2 semaines (désignés par B).

L'installateur ne reçoit pas de demandes de travaux qui n'entrent pas dans cette classification. Il n'y a pas de liste d'attente. Les demandes d'installation parviennent à l'entrepreneur au début de chaque semaine. Une observation statistique a montré que les probabilités pour recevoir un lundi donné, au moins une demande de travaux du type A, ou au moins une demande de travaux du type B valent respectivement $p = 0{,}5$ et $q = 0{,}6$. Ces probabilités sont indépendantes . Certaines semaines, des travaux sont refusés, l'équipe étant déjà occupée sur une installation de type B : dans ce cas le client s'adresse à un concurrent. D'autres semaines l'équipe reste inactive faute de demande d'installation. Lorsque l'installateur reçoit simultanément 2 demandes: une du type A et une du type B, il donne suite à celle du type B. L'installation du type A procure un bénéfice de 5000F, celle du type B 12000F, et l'inactivité de l'équipe pendant une semaine engendre une perte de 2500F.

1. On désire représenter par une chaîne de Markov l'évolution de l'activité de l'équipe d'une semaine sur l'autre. Quels sont les 4 états?
2. Dessinez le graphe associé à cette chaîne et donnez sa matrice de transition.
3. En supposant que l'entreprise fonctionne depuis plusieurs semaines, trouver la probabilité de chacun des états ; justifier la validité de ce calcul.
4. En déduire l'espérance mathématique du gain relatif à une semaine de fonctionnement.

Exercice 1.13 Chaque année à Noel, les mangeurs de chocolat adoptent un type de chocolat, pour une durée de un an renouvelable. Un sondage effectué sur un échantillon représentatif de cette population a donné les chiffres suivants : parmi les mangeurs de chocolat noir, 65% sont fidèles à leur choix, tandis que 35% préfèrent essayer le chocolat au lait. De même, parmi les mangeurs de chocolat au lait, 70% restent fidèles et 30% changent pour le noir. Initialement, il y avait 50% de mangeurs de chocolat noir et 50% de mangeurs de chocolat au lait. On suppose que le marchand de chocolat dispose de quantités suffisantes.

1. Quelle sera la tendance au bout d'un an?

2. Peut–on connaître la tendance au bout de quelques années, sachant que les résultats des enquêtes ne changent pas ? Si oui, quelles seront les proportions des mangeurs de chocolat noir et de chocolat au lait ?

1.2 Chaînes de Markov en temps continu

1.2.1 Définitions

Dans cette section, le temps est mesuré par un nombre réel positif ou nul. On étudie les processus aléatoires dont l'état est un entier positif on nul (par exemple, le nombre de clients dans une file d'attente). Par commodité, on supposera que le nombre d'états est fini. On désigne par $\pi_i(t)$, la probabilité que le processus étudié soit dans l'état i à l'instant t et l'on pose

$$\pi(t) = (\pi_0(t),\pi_1(t),\dots,\pi_n(t))$$

qui est un vecteur stochastique à tout instant t.

1.2.1.1 Générateur stochastique infinitésimal

Une matrice réelle carrée A est appelée *générateur stochastique infinitésimal* si

1. la somme des éléments d'une ligne quelconque est nulle.
2. les éléments sur la diagonale sont négatifs ou nuls et les autres sont positifs ou nuls.

Exemple 1.5

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

Exercice 1.14 La somme de deux générateurs stochastiques infinitésimaux est-t'elle un générateur stochastique infinitésimal?

Exercice 1.15 Soit A un générateur stochastique infinitésimal. La matrice λA pour $\lambda \in \mathbb{R}$ est-t'elle un générateur stochastique infinitésimal?

1.2.1.2 Définition d'une chaîne de Markov

La fonction $t \to \pi(t)$ est une chaîne de Markov si et seulement si le vecteur stochastique $\pi(t)$ vérifie, à tout instant t, une équation différentielle ordinaire de la forme

$$\boxed{\frac{d}{dt}\pi(t) = \pi(t)\ A(t)} \tag{1.14}$$

où $A(t)$ est un générateur stochastique infinitésimal. Dans la suite, on suposera que cette matrice $A(t)$ est indépendante du temps ; on dira alors que la chaîne de Markov est *homogène dans le temps.*

Cettte définition se justifie de la manière suivante. Considérons un système dynamique (processus) aléatoire dont l'évolution est gouvernée par une chaine de Markov en temps discret, le *pas de temps* entre deux "tops" d'horloge étant supposé infiniement petit (positif). Un tel nombre réel infiniement petit positif est habituellement noté ε en mathématique. La matrice de transition notée $P(\varepsilon)$ est proche de l'identité car on suppose que le système "évolue trés peu" pendant ce temps ε. On suppose donc que

$$P(\varepsilon) = \mathrm{Id} + \varepsilon A + \mathrm{o}(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0^+. \tag{1.15}$$

Dans le calcul qui va suivre, nous allons appliquer une technique fondamentale en calcul différentiel : on "tue" les termes en ε^2 lorsqu'ils sont additionnés avec des termes en ε. Remarquons d'abord que la matrice $P(\varepsilon)$ est stochastique si et seulement si la matrice A est un générateur stochastique infinitésimal.

L'équation d'état (1.2) devient alors

$$\begin{aligned}
\pi(t+\varepsilon) &= \pi(t)\ P(\varepsilon) \\
&= \pi(t)\ (\mathrm{Id} + \varepsilon A) \\
&= \pi(t) + \varepsilon\ \pi(t) A \\
\frac{\pi(t+\varepsilon) - \pi(t)}{\varepsilon} &= \pi(t)\ A
\end{aligned}$$

Lorsque $\varepsilon \to 0^+$, le taux d'accroissement dans le membre gauche de la dernière équation tend vers la dérivée $\dot{\pi}(t)$ et l'on retrouve l'équation (1.14).

1.2.2 Résolution de l'équation d'état

1.2.2.1 Résolution par le calcul d'une exponentielle

Proposition 1.2 *L'équation différentielle ordinaire (A est une matrice constante carrée indicée de 0 à n)*

$$\dot{\pi}(t) = \pi(t)\ A \tag{1.16}$$

admet pour solution le vecteur $\pi(t) = \pi(0)\ \exp(tA)$ *avec*

$$e^{tA} = 1 + tA + \frac{1}{2!}t^2A^2 + \frac{1}{3!}t^3A^3 + \cdots \tag{1.17}$$

De plus, si la matrice A est un générateur stochastique infinitésimal, alors la matrice $\exp(tA)$ *est, à tout instant t, une matrice stochastique.*

Preuve – En dérivant terme à terme le développement de Taylor (1.17), on montre que $\frac{d}{dt}\exp(tA) = \exp(tA)\ A$. On en déduit que

$$\dot{\pi}(t) = \pi(0)\ \frac{d}{dt}\exp(tA) = \pi(0)\exp(tA)A = \pi(t)A.$$

Donc le vecteur ligne $\pi(t)$ vérifie l'equation (1.16). Montrons que la matrice $P(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(tA)$ est stochastique. La matrice $P(t)$ vérifie l'équation différentielle $\dot{P}(t) = P(t)A$ avec la condition initiale $P(0) = \mathrm{Id}$. Soit u le vecteur colonne dont les $n+1$ composantes sont égales à 1. Chaque ligne de la matrice A a une somme nulle donc $Au = 0$. On en déduit que $\dot{P}(t)\ u = P(t)A\ u = 0$. Le vecteur $P(t)\ u$ dont la dérivée est nulle est donc constant. Cette constante évaluée à l'instant $t = 0$ vaut $P(0)\ u = \mathrm{Id}\ u = u$. Donc $P(t)u = u$ quelque soit t et par suite, la somme des éléments d'une ligne quelconque de $P(t)$ est égale à un. □

1.2.2.2 Utilisation des valeurs propres

Le calcul de l'exponentielle $\exp(tA)$ est facile lorsque A est une matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. On obtient

$$e^{tD} = \mathrm{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\right). \tag{1.18}$$

En général, la matrice A est diagonalisable sous la forme $A = Q \cdot D \cdot Q^{-1}$, la matrice D étant diagonale. Son exponentielle est alors

$$e^{tA} = Q \cdot e^{tD} \cdot Q^{-1}. \tag{1.19}$$

Lorsque plusieurs valeurs propres sont égales (le polynôme caractéristique de A admet au moins une racine double), il se peut que la matrice A ne soit pas diagonalisable. On montre qu'elle se décompose alors en "blocs de Jordan" et que dans ce cas, $\exp(tA)$ se décompose en une combinaison linéaire de *polynômes exponentiels* de la forme

$$e^{tA} = \sum_i f_i(t)\ e^{\lambda_i t}, \tag{1.20}$$

où les $f_i(t)$ sont des polynômes en t et les λ_i les valeurs propres distinctes de A.

1.2.2.3 Discrétisation d'une chaîne de Markov en temps continu

La matrice stochastique $P(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\varepsilon A)$ calculée pour un temps infiniement petit ε admet le développement limité

$$P(\varepsilon) = \mathrm{Id} + \varepsilon A + \mathrm{o}(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0^+. \tag{1.21}$$

De la formule $\pi(t) = \pi(0)\ \exp(tA)$, on déduit

$$\pi(t+1) = \pi(t) \exp(A). \tag{1.22}$$

Ainsi la chaîne de Markov en temps discret dont la matrice de transition est égale à $P = \exp(A)$ a le même comportement, pour des valeurs entières du temps, que la chaîne de Markov en temps continu dont le générateur infinitésimal est la matrice A.

1.2.2.4 Utilisation de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace (voir section A.3.3) permet de résoudre les équations d'état en temps continu (1.14)

$$\dot{\pi}(t) = \pi(t)\ A \tag{1.23}$$

de la même manière que la transformée en z permet de résoudre les équations d'état en temps discret (1.2). Les calculs sont donc tout à fait analogues à ceux menés dans la section 1.1.2.3. La transformée de Laplace $\widehat{\pi}(s)$ du vecteur stochastique $\pi(t)$ est calculée composante par composante i.e.

$$\widehat{\pi}(s) \stackrel{\text{def}}{=} (\widehat{\pi}_1(s), \widehat{\pi}_2(s),\ \ldots, \widehat{\pi}_n(s)).$$

Appliquée aux deux membres de l'équation d'état à résoudre, la transformée de Laplace donne :

$$s\widehat{\pi}(s) - \pi(0) = \widehat{\pi}(s)\ A.$$

On en déduit $\widehat{\pi}(s)(s\text{Id} - A) = \pi(0)$ et par suite

$$\widehat{\pi}(s) = \pi(0)\ (s\ \text{Id} - A)^{-1}. \tag{1.24}$$

On démontre que vecteur $\widehat{\pi}(s)$ est un vecteur de fractions rationnelles en s que l'on peut décomposer en éléments simples. Des tables disponibles permettent d'effectuer la transformée de Laplace *inverse* afin de calculer l'expression symbolique du vecteur stochastique $\pi(t)$. Finalement, on a remplacé le calcul de l'exponentielle $\exp(tA)$ par le calcul de l'inverse de la matrice $(s\ \text{Id} - A)$, ce qui est plus simple, surtout si le calcul est effectué "à la main".

1.2.2.5 Calcul d'une distribution stationnaire

On part de la formule $\dot{\pi}(t) = \pi(t)A$. Le vecteur stochastique $\pi(t)$ est invariant dans le temps lorsque $\dot{\pi}(t) = 0$, c'est à dire lorsque $\pi(t)A = 0$. En conclusion, une distribution stationnaire π s'obtient en résolvant le système linéaire

$$\boxed{\pi A = 0} \tag{1.25}$$

1.3 Processus de naissance et de mort

1.3.1 Définition

On considère une file d'attente comportant entre 0 et n personnes. Le nombre de personnes présentes dans la file à l'instant t est l'état du processus. On se donne des nombres positifs quelconques $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots \lambda_{n-1})$ et $(\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n)$. On suppose que pendant un intervalle de temps infiniment petit ε, sachant qu'il y a k personnes présentes dans la file :

1. la probabilité qu'une personne arrive dans la file est $\lambda_k \varepsilon + \mathrm{o}(\varepsilon)$,

2. la probabilité qu'une personne sorte de la file est $\mu_k \varepsilon + \mathrm{o}(\varepsilon)$,
3. les autres éventualités ont une probabilité en $\mathrm{o}(\varepsilon)$.

Ces hypothèses reviennent à poser que la matrice de transition $P(\varepsilon)$, calculée pour l'intervalle de temps ε, est de la forme (pour $n = 4$)

$$P(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\lambda_0\varepsilon & \lambda_0\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1\varepsilon & 1-(\lambda_1+\mu_1)\varepsilon & \lambda_1\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2\varepsilon & 1-(\lambda_2+\mu_2)\varepsilon & \lambda_2\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3\varepsilon & 1-(\lambda_3+\mu_3)\varepsilon & \lambda_3\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4\varepsilon & 1-\mu_4\varepsilon \end{pmatrix} + \mathrm{o}(\varepsilon)$$

1.3.2 Générateur infinitésimal

Le générateur stochastique infinitésimal A vérifie, par définition, l'équation (1.21)

$$P(\varepsilon) = \mathrm{Id} + \varepsilon A + \mathrm{o}(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0^+$$

Par exemple, pour $n = 4$, on trouve

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 & -(\lambda_3+\mu_3) & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_4 & -\mu_4 \end{pmatrix} \tag{1.26}$$

Le processus est représenté par le diagramme de la figure 1.3.

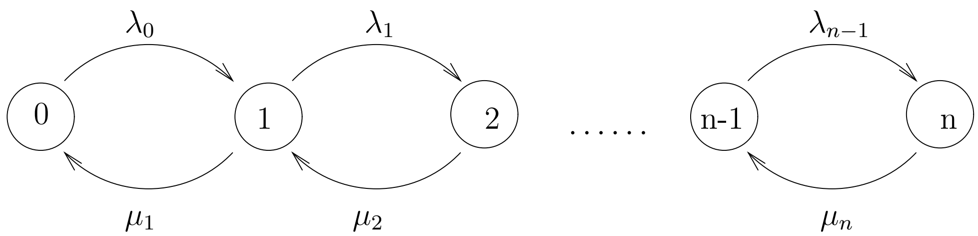

FIG. 1.3 – *Processus de naissance et de mort*

1.3.3 Distribution stationnaire

Calculons la distribution stationnaire π en résolvant l'équation $\pi A = 0$. On obtient le système ($n = 4$)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -\lambda_0\pi_0 + \mu_1\pi_1 & = & 0 \\ \lambda_0\pi_0 - (\lambda_1+\mu_1)\pi_1 + \mu_2\pi_2 & = & 0 \\ \lambda_1\pi_1 - (\lambda_2+\mu_2)\pi_2 + \mu_3\pi_3 & = & 0 \\ \lambda_2\pi_2 - (\lambda_3+\mu_3)\pi_3 + \mu_4\pi_4 & = & 0 \\ \lambda_3\pi_3 - \mu_4\pi_4 & = & 0 \end{array} \right. \tag{1.27}$$

Les calculs donnent (n quelconque)

$$\begin{cases} \pi_1 &= \dfrac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \\ \pi_2 &= \dfrac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \dfrac{\lambda_2}{\mu_3}\pi_2 \\ \cdots &= \cdots \\ \pi_n &= \dfrac{\lambda_{n-1}}{\mu_n}\pi_{n-1} \end{cases} \tag{1.28}$$

et par suite

$$\pi_k = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\pi_0, \qquad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{1.29}$$

Compte-tenu de la relation $\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_n = 1$, la valeur de π_0 est donnée par la formule

$$\frac{1}{\pi_0} = 1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2} + \cdots + \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} \tag{1.30}$$

On obtient finalement la distribution stationnaire $\pi = (\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_n)$

$$\boxed{\pi_k = \frac{\dfrac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}}{1 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{i-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_i}}} \qquad (k = 1,2,\ldots,n) \tag{1.31}$$

Exercice 1.16 Ecrire, dans le langage qui vous convient le mieux, un programme permettant de calculer le vecteur $(\pi_0, \ldots, \pi_n)$ en fonction des vecteurs $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ et $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Exercice 1.17 On considère un routeur qui reçoit en moyenne λ paquets par unité de temps selon un processus de Poisson. On suppose que le temps de traitement d'un paquet par le routeur est distribué selon une loi exponentielle de moyenne $1/\mu$. On ne prévoit pas de file d'attente et lorsqu'un paquet arrive pendant que le routeur est occupé, il est perdu.

Dans cet exercice, tous les calculs seront effectués en fonction de λ et de μ.

1. Modéliser par une chaine de Markov en temps continu en précisant la signification de chaque état de la chaine.
2. Calculer la distribution stationnaire.
3. Calculer le pourcentage de paquets perdus.

On décide de prévoir une file d'attente pouvant contenir au plus un paquet (0 ou 1).

1. Modéliser par une chaine de Markov en temps continu en précisant la signification de chaque état de la chaine.
2. Calculer la distribution stationnaire.
3. Calculer le pourcentage de paquets perdus.
4. Calculer le pourcentage des paquets traités qui ont du attendre.
5. Calculer le nombre moyen de paquets traités pendant une unité de temps.

Chapitre 2

Files d'attente

2.1 Processus d'arrivée des clients dans une file

2.1.1 Le processus de Poisson

Le processus de Poisson occupe une place privilégiée pour décrire

- l'arrivée des clients vers un guichet
- l'occurrence d'accidents dans une entreprise
- l'apparition de pannes dans un parc de machines
- l'arrivée de tâches dans l'unité centrale d'un ordinateur etc.

Il y a principalement deux variables aléatoires à considérer :

1. Le nombre de clients $N(t)$ arrivant dans la file pendant le temps t ; cette variable est un entier positif ou nul.
2. Le temps T qui s'écoule entre deux arrivées consécutives ; cette variable est un nombre réel positif ou nul.

Ces deux variables aléatoires sont liées car si le nombre de clients $N(t)$ qui arrivent dans la file est élevé, c'est que le temps entre deux arrivées successives est faible. De manière plus précise,

Théorème 2.1 *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La probabilité qu'un client arrive dans la file pendant un intervalle de temps infiniement petit $\varepsilon > 0$ vaut $\lambda\varepsilon + \mathrm{o}(\varepsilon)$ avec λ constant (voir processus de naissance et de mort 18).*
2. *Le nombre de clients $N(t)$ arrivant dans la file pendant un intervalle de temps quelconque t suit une loi de Poisson de moyenne λt, autrement dit,*

$$\mathrm{Prob}\,\{N(t) = k\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!} \tag{2.1}$$

3. *Le temps T qui s'écoule entre deux arrivées consécutives obéït à une loi exponentielle de paramètre λ (moyenne $1/\lambda$), autrement dit,*

$$\text{Prob}\{T > t\} = e^{-\lambda t} \tag{2.2}$$

Preuve – Montrons que la condition 1 implique la condition 2. L'évènement $T \leq t$ est équivalent à l'évènement $N(t) \geq 1$. La probabilité de voir celui-ci se réaliser est

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{N(t) \geq 1\} &= 1 - \text{Prob}\{N(t) = 0\} \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

donc $\text{Prob}\{T > t\} = 1 - \text{Prob}\{T \leq t\} = e^{-\lambda t}$.

Le fait que la condition 2 implique la condition 1 est admis. □

2.1.2 Utilisation de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

On dit que la variable aléatoire entière N suit une loi de Poisson de paramètre λ lorsque

$$\boxed{\text{Prob}\{N = k\} = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}} \tag{2.3}$$

Il reste à justifier pourquoi le nombre de clients entrant dans une file d'attente pendant un temps t obéït *raisonnablement* à une loi de Poisson. Cette loi est appelée loi des évènements rares, en raison du fait qu'elle s'obtient comme la limite d'une loi de Bernoulli quand le nombre d'épreuves tend vers l'infini en même temps que la probabilité de succès d'une épreuve tend vers zéro.

Soit une population de n personnes susceptibles de rejoindre indépendamment la file pendant une unité de temps, chacune avec une probabilité p. Le nombre N de personnes qui arrivent dans la file suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(n,p)$

$$\text{Prob}\{N = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Le théorême A.1 dit que

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(n,\lambda/n).$$

Ainsi le choix d'une loi de Poisson pour compter le nombre de clients qui arrivent dans une file d'attente pendant un intervalle de temps donné est justifié par le fait que la population susceptible d'alimenter cette file est nombreuse et que les choix individuels sont pris de manière indépendante.

Exercice 2.1 Une compagnie d'assurance estime que le nombre annuel de ses clients victimes d'un incendie est une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson. Est–ce raisonnable?

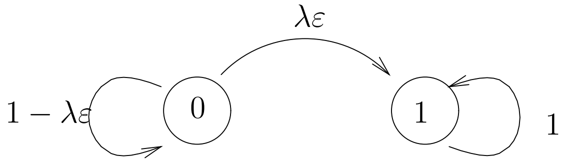

FIG. 2.1 – *Graphe de transition*

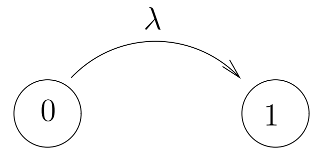

FIG. 2.2 – *Générateur infinitésimal*

2.1.3 La loi exponentielle comme chaîne de Markov

Prenons l'exemple d'une machine dont la probabilité de tomber en panne pendant un intervalle de temps infiniement petit ε est $\lambda\varepsilon + \mathrm{o}(\varepsilon)$. La figure 2.1 représente le graphe de transition entre les instants t et $t+\varepsilon$. La matrice de transition correspondante est

$$P(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 1-\lambda\varepsilon & \lambda\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \mathrm{o}(\varepsilon) \tag{2.4}$$

En posant $P(\varepsilon) = \mathrm{Id} + \varepsilon A + \mathrm{o}(\varepsilon)$, on obtient le générateur infinitésimal correspondant

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

Au départ, la machine est en bon état (état 0), donc la distribution initiale est $\pi(0) = (1{,}0)$. L'équation différentielle $\dot{\pi}(t) = \pi(t)\ A$ s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\pi}_0(t) & = & -\lambda\pi_0(t) \\ \dot{\pi}_1(t) & = & \lambda\pi_0(t) \\ \pi_0(0) & = & 1 \\ \pi_1(0) & = & 0 \end{array} \right. \tag{2.6}$$

dont la solution est

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \pi_0(t) & = & e^{-\lambda t} \\ \pi_1(t) & = & 1 - e^{-\lambda t} \end{array} \right. \tag{2.7}$$

La probabilité que cette machine soit en bon état au temps t est donc $e^{-\lambda t}$. On en déduit que la durée de vie T de cette machine suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2.2 Généralités sur les systèmes d'attente

Le modèle général d'un système d'attente (et de service) peut être résumé comme suit: des "clients" arrivent à un certain endroit et réclament un certain service. Les instants d'arrivée et les durées de service sont généralement des quantités aléatoires. Si un poste de service est libre, le client qui arrive se dirige immédiatement vers ce poste où il est servi, sinon il prend sa place dans la file d'attente dans laquelle les clients se rangent suivant leur ordre d'arrivée.

Un système d'attente comprend donc un *espace de service* avec une ou plusieurs *stations de service* montées en parallèle, et un espace d'attente dans lequel se forme une éventuelle file d'attente.

2.2.1 Classification des systèmes d'attente

Pour identifier un système d'attente, on a besoin des spécifications suivantes.

- La nature stochastique du processus des arrivées (flux d'entrée) qui est défini par la distribution des intervalles séparant deux arrivées consécutives.
- La distribution du temps aléatoire de service.
- Le nombre s des stations de service qui sont montées en parallèle.
- La capacité N du système. Si $N < \infty$, la file d'attente ne peut dépasser une longueur de $N - s$ unités. Dans ce cas, certains clients qui arrivent vers le système n'ont pas la possibilité d'y entrer.

Pour la classification des systèmes d'attente, on recourt à une *notation symbolique* comprenant quatre symboles dans l'ordre suivant : $A/B/s/N$,

où	A	=	distribution du temps entre deux arrivées successives,
	B	=	distribution des durées de service,
	s	=	nombre de stations de service montées en parallèle,
	N	=	capacité du système (serveurs + file d'attente).

Pour spécifier les distributions A et B, on adopte la convention suivante :

M	=	distribution qui vérifie la propriété de Markov, i.e. processus de Poisson pour les arrivées, loi exponentielle pour le temps de service,
E_k	=	distribution d'Erlang d'ordre k,
G	=	distribution générale (on ne sait rien sur ses caractéristiques),
D	=	cas déterministe (la variable ne prend qu'une seule valeur admise).

Exemple – La notation $M/D/1/4$ définit un système d'attente comprenant une station service et pour lequel la longueur maximale de la file d'attente vaut $4 - 1 = 3$. Le processus d'arrivée est un processus de Poisson (voir section 2.1.1) et la durée du service est constante. □

Exercice 2.2 Expliciter les notations $M/M/1/1$, $M/G/5/\infty$ et $M/M/\infty/\infty$.

2.2.2 Formules de Little

On considère un système d'attente quelconque ($G/G/s/N$) et on adopte les conventions de notation suivantes :

L	=	nombre de clients dans le système (file d'attente + service)
L_q	=	nombre de clients dans la file d'attente
T	=	temps de séjour d'un client dans le système
T_q	=	temps de séjour d'un client dans la file d'attente
λ	=	inverse du temps moyen séparant deux clients consécutifs désirant entrer dans le système
λ_e	=	inverse du temps moyen séparant deux clients consécutifs entrant effectivement dans le système
μ	=	inverse de la durée moyenne de service

Lorsque la capacité du système est illimitée, on a $\lambda_e = \lambda$ et dans tous les cas $\lambda_e \leq \lambda$.

On considère les moyennes $\mathrm{E}(L)$,$\mathrm{E}(L_q)$,$\mathrm{E}(T)$,$\mathrm{E}(T_q)$ calculées pour la distribution stationnaire (on suppose qu'elle existe). On a alors, $\mathrm{E}(T) = \mathrm{E}(T_q) + 1/\mu$ car on suppose que le temps de service d'un client (en moyenne $1/\mu$) est indépendant de son temps d'attente dans la file.

Théorème 2.2 (Little) *En adoptant les notations précèdentes, on a :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathrm{E}(L) & = & \lambda_e \mathrm{E}(T) \\ \mathrm{E}(L_q) & = & \lambda_e \mathrm{E}(T_q) \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Preuve – (intuitive) Considérons un client qui reste un temps T dans le système. A l'instant où ce même client quitte le système, il a, en moyenne, $\lambda_e T$ clients derrière lui. $\square$

Exercice 2.3 Démontrer la formule $\mathrm{E}(L) = \mathrm{E}(L_q) + \lambda_e/\mu$.

2.2.3 Trafic offert

Le pourcentage de temps pendant lequel une ressource est occupée est appelé *trafic offert*. L'unité de mesure est le Erlang. Par exemple, une ligne téléphonique occupée à 100% a un trafic de 1 Erlang. Typiquement, une ligne résidentielle fixe a un trafic de 70 mE, une ligne industrielle 150 mE et un téléphone mobile 25 mE.

Considérons une ligne téléphonique avec

T	durée de la période d'observation
t_k	durée du k–ieme appel
$\bar{t}$	durée moyenne d'un appel
N	nombre d'appels pendant la période d'observation T
a	trafic en Erlang

Le trafic offert est alors

$$a = \frac{1}{T} \times \sum_{k=1}^{N} t_k = \frac{N \times \bar{t}}{T} \tag{2.9}$$

Exercice 2.4 On suppose que nombre d'appels, par unité de temps, suit une loi de Poisson de paramètre λ et que la durée d'un appel suit la loi exponentielle de paramètre μ. Montrer que le trafic offert est égal à λ/μ.

2.3 Le système $M/M/1/\infty$

Par hypothèse :

– les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,

– le temps de service est une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$,
– il y a un seul serveur,
– la file d'attente peut accueillir un nombre quelconque de clients.

Dans la section 2.1.3, on a vu qu'une loi exponentielle est une chaîne de Markov particulière. On en déduit que cette file $M/M/1/\infty$ est un cas particulier du processus de naissance et de mort vu en section 1.3. Les λ_k et les μ_k sont indépendants de k, autrement dit, on peut poser

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda & (k \geq 0) \\ \mu_k = \mu & (k \geq 1) \end{cases} \tag{2.10}$$

2.3.1 Distribution stationnaire

Nous allons démontrer que la distribution stationnaire π est un vecteur ayant une infinité de composantes formant une progression géométrique (voir (A.16) 44. Les formules (1.29) et (1.30) deviennent

$$\begin{aligned} \pi_k &= \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \pi_0 \qquad (k = 1,2,\ldots) \\ \frac{1}{\pi_0} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \end{aligned}$$

et par suite

$$\pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \qquad (k = 0,1,2,\ldots). \tag{2.11}$$

Dans le cas où le rapport $\lambda/\mu > 1$, il arrive en moyenne λ clients par unité de temps, alors que pendant ce même temps, le serveur, à plein régime, ne peut traiter que μ clients. Donc le nombre de clients en attente va, à coup sûr, tendre vers l'infini. Lorsque $\lambda/\mu = 1$, la formule (2.11) montre que tous les π_k sont nuls, ce qui est impossible ; la distribution stationnaire n'existe donc pas dans ce cas.

Lorsque $\lambda/\mu < 1$, la formule (2.11) définit un vecteur π ayant toutes ses composantes (en nombre infini) strictement positives. On a démontré le théorème

Théorème 2.3 *Soit un système $M/M/1/\infty$ de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$ tels que $\lambda < \mu$. Alors le nombre de clients présents dans le système, en régime stationnaire, suit une loi géométrique de raison λ/μ*

$$\boxed{\pi_k = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} \qquad (k = 0,1,2,\ldots).$$

En particulier, la probabilité que le serveur soit occupé est $1 - \pi_0 = \lambda/\mu$.

D'après le théorème *ergodique* (dont la preuve dépasse l'objectif de cette modeste introduction), la probabilité π_k correspond au pourcentage de temps pendant lequel le système contient k clients, lorsque le temps pendant lequel on observe le système tend vers l'infini. De même, la fraction du temps pendant lequel le serveur est occupé tend vers $1 - \pi_0 = \lambda/\mu$. Ce taux d'occupation du serveur est encore appelé *trafic offert* – voir section 2.2.3. Dans la file $M/M/1/\infty$, il n'y a pas de différence entre le trafic offert et le trafic écoulé car aucune demande service n'est rejétée. Le trafic (offert ou écoulé) (2.9) du serveur est donc

$$\boxed{a = \frac{\lambda}{\mu}} \tag{2.12}$$

Exercice 2.5 On considère un système d'attente $M/M/1/\infty$; un client arrive en moyenne toutes les 12 minutes et la durée moyenne de service est 8 minutes. Calculer la probabilité p pour que deux clients au moins attendent d'être servis. Calculer l'augmentation relative de p lorsque le taux d'entrée λ augmente de 20%.

Solution – Si l'on prend l'heure comme unité de temps, on obtient $\lambda = 5$, $\mu = 7{,}5$ et par suite $\lambda/\mu = 2/3$. Lorsque deux clients attendent, il y a forcément au moins trois clients dans le système. On trouve donc

$$p = \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \cdots = (2/3)^3 = 0{,}296.$$

Lorsque $\lambda = 6$, on a $\lambda/\mu = 4/5$ et $p = (4/5)^3 = 0{,}512$, ce qui correspond à une augmentation relative de p de 73%. □

Exercice 2.6 On considère un système d'attente $M/M/1/\infty$; chaque heure, 20 clients arrivent en moyenne et la probabilité qu'un client attende est 0,5.

(a) Calculer le temps de service moyen.

(b) Calculer la probabilité qu'un client qui arrive, trouve devant lui une file d'attente de n personnes.

Solution –

(a) On a $1 - \pi_0 = \lambda/\mu = 0{,}5$ donc

$$\frac{1}{\mu} = \frac{0{,}5}{\lambda} = \frac{0{,}5}{20}\ \mathrm{h} = 1{,}5\ \mathrm{min}.$$

(b) A l'arrivée du client, il y a $n+1$ personnes présentes dans le système. La probabilité cherchée est donc

$$\pi_{n+1} = (1-a)a^{n+1} = 0{,}5^{n+2}.$$

□

2.3.2 Caractéristiques de la file $M/M/1/\infty$

La longueur L (nombre de clients présents dans le système) a pour moyenne et variance (voir loi géométrique en section (A.16) page 44)

$$\mathrm{E}(L) = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} \qquad \mathrm{Var}(L) = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)^2} \tag{2.13}$$

Une question importante, à savoir le calcul du temps passé par un client dans le système, est résolue par le théorème suivant.

Théorème 2.4 *Soit une file $M/M/1/\infty$ de paramètres λ et μ avec $\lambda < \mu$. En régime stationnaire, la variable aléatoire T (temps d'attente + service) suit une loi exponentielle de paramètre $\mu - \lambda$, autrement dit*

$$\mathrm{Prob}\,\{T > t\} = e^{-(\mu-\lambda)t}.$$

Le temps moyen passé par un client dans le système est donc $\mathrm{E}(T) = \dfrac{1}{\mu - \lambda}$.

Preuve – admise. □

Exercice 2.7 En utilisant la formule de Little (thm. 2.2), retrouver le temps moyen passé par un client dans le système.

Exercice 2.8 Dans une station de taxis, les arrivées de voitures et de clients sont des processus poissonniens de taux respectifs $\lambda = 1$ et $\mu = 1{,}25$ par minute. Un taxi attend quelque soit le nombre de taxis dans la file (potentiellement illimitée). Par contre, un client arrivant dans la station n'attend pas de taxi si le nombre de clients en attente est déjà égal à trois.

1. Modéliser par une chaine de Markov en temps continu en précisant la signification de chaque état de la chaine.
2. Calculer la distribution stationnaire.
3. Quel est le pourcentage de clients qui sont servis.
4. Calculer le nombre moyen de clients qui attendent un taxi.
5. Calculer le nombre moyen de taxis qui attendent un client.
6. Calculer le temps moyen d'attente d'un client et d'un taxi.

2.3.3 Introduction d'un facteur d'impatience

On suppose qu'un client qui arrive dans la file a le choix de quitter le système immédiatement sans se faire servir. Ce choix est fait en fonction du nombre de clients présents devant lui dans la file.

On peut, par exemple, supposer que cette probabilité d'*impatience* vaut $k/k+1$ lorsque k clients sont présents dans le système (0 si le serveur est libre, 1/2 si le serveur est occupé et la file est vide etc.). Tout se passe comme si

$$\lambda_k = \lambda \left(1 - \frac{k}{k+1}\right) = \frac{\lambda}{k+1}, \qquad (k \geq 0).$$

Compte–tenu de ces hypothèses, les formules (1.29) et (1.30) donnent la distribution stationnaire (loi de Poisson de paramètre a)

$$\pi_k = e^{-a}\frac{a^k}{k!} \text{ avec } a = \frac{\lambda}{\mu}, \qquad (k \geq 0). \tag{2.14}$$

Exercice 2.9 Faire la preuve de la formule (2.14).

2.4 Le système $M/M/\infty$

Par hypothèse :

- les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,
- le temps de service est une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$,
- il y a une infinité de serveurs.

Il est évident qu'aucune file d'attente ne se forme puisque chaque client est servi dès son arrivée. Ce système a un intérêt théorique car il permet une étude approximative d'un système d'attente comportant un grand nombre de serveurs.

Ce système est modelisé par un processus de naissance et de mort (section 1.3) tel que

$$\begin{cases} \lambda_k &= \lambda \qquad (k \geq 0) \\ \mu_k &= k\mu \qquad (k \geq 1) \end{cases} \tag{2.15}$$

2.4.1 Distribution stationnaire

Théorème 2.5 *Le nombre de clients présents dans le système $M/M/\infty$ en régime stationnaire suit une loi de Poisson de paramètre λ/μ, autrement dit*

$$\pi_k = e^{-\lambda/\mu}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \qquad (k = 0,1,2,\ldots) \tag{2.16}$$

Preuve – On utilise principalement la formule (1.31). □

On en déduit que le nombre L de clients en cours de service a pour moyenne et variance (loi de Poisson)

$$\mathrm{E}(L) = \mathrm{Var}(L) = \lambda/\mu. \tag{2.17}$$

2.5 Le système $M/M/s/s$

Par hypothèse :

- les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,
- le temps de service est une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$,
- il y a s serveurs montés en parallèle,
- il n'y a pas de file d'attente.

Ce système est modelisé par un processus de naissance et de mort (section 1.3) tel que

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda & (0 \leq k \leq s) \\ \mu_k = k\mu & (0 < k \leq s) \end{cases} \tag{2.18}$$

2.5.1 Distribution stationnaire

Les formules (1.29) et (1.30) donnent ($a \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu$)

$$\begin{aligned} \pi_k &= \frac{\lambda_0}{\mu_1}\frac{\lambda_1}{\mu_2}\cdots\frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\,\pi_0 \\ &= \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{2\mu}\cdots\frac{\lambda}{k\mu}\pi_0 = \frac{a^k}{k!}\,\pi_0 \end{aligned}$$

Compte–tenu de la condition $\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_s = 1$, on obtient finalement

$$\boxed{\pi_k = \frac{\frac{a^k}{k!}}{\sum_{n=0}^{s}\frac{a^n}{n!}}} \qquad (0 \leq k \leq s) \tag{2.19}$$

2.5.2 Première formule de Erlang (B)

En se souvenant du théorème ergodique, π_s est la fraction du temps pendant laquelle les s serveurs sont occupés. Ceci est donc la *probabilité de perte* particulièrement importante en téléphonie. En notant π_s par $B(s,a)$, on obtient la formule de perte de Erlang

$$\boxed{B(s,a) = \frac{\frac{a^s}{s!}}{\sum_{n=0}^{s}\frac{a^n}{n!}}} \tag{2.20}$$

Exercice 2.10 Est-ce que $B(s,a)$ représente la probabilité pour qu'un client qui arrive dans le système soit rejeté ? Est-ce que $B(s,a)$ représente le pourcentage de clients rejetés ? A quelle condition pourrait-il y avoir une différence entre ces deux notions ?

2.5.3 Nombre moyen de clients dans le système

Proposition 2.1 *En régime stationnaire, le nombre L de clients dans le système a pour moyenne*

$$\mathrm{E}(L) = a(1 - B(s,a)) \tag{2.21}$$

Preuve –

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(L) &= \sum_{k=0}^{s} k\pi_k = \sum_{k=1}^{s} k\pi_k \\
&= \sum_{k=1}^{s} a\pi_{k-1} \quad \text{car } \pi_k = \frac{a^k}{k!}\pi_0 \\
&= a\sum_{k=0}^{s-1} \pi_k \\
&= a(1 - \pi_s).
\end{aligned}$$

□

2.6 Le système $M/M/s/\infty$

Par hypothèse :

- les clients arrivent selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda > 0$,
- le temps de service est une loi exponentielle de paramètre $\mu > 0$,
- il y a s serveurs montés en parallèle,
- la file d'attente peut accueilir un nombre quelconque de clients.

Ce système est modelisé par un processus de naissance et de mort (section 1.3) tel que

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \lambda_k &=& \lambda & (k = 0,1,2,\ldots) \\ \mu_k &=& k\mu & (0 < k \leq s) \\ &=& s\mu & (k \geq s) \end{array} \right. \tag{2.22}$$

2.6.1 Distribution stationnaire

Les formules (1.29) et (1.30) donnent ($a \stackrel{\text{def}}{=} \lambda/\mu$)

$$\begin{aligned}
\pi_k &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} \times \frac{\lambda_1}{\mu_2} \times \cdots \times \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}\, \pi_0 \\
&= \frac{\lambda}{\mu} \times \frac{\lambda}{2\mu} \times \cdots \times \frac{\lambda}{k\mu}\, \pi_0 = \frac{a^k}{k!}\, \pi_0 \qquad (k \leq s) \\
\pi_k &= \frac{a^s}{s!} \left(\frac{\lambda}{s\mu}\right)^{k-s} \pi_0 = \frac{a^k}{s!\; s^{k-s}}\, \pi_0 \qquad (k \geq s)
\end{aligned}$$

Compte–tenu de la condition $\pi_0 + \pi_1 + \cdots + \pi_s = 1$, on obtient après quelques calculs

$$1/\pi_0 = \frac{a^s}{s!} \times \frac{s}{s-a} + \sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!} \tag{2.23}$$

2.6.2 Deuxième formule de Erlang (C)

En se souvenant du théorème ergodique, la probabilité

$$C(s,a) \stackrel{\text{def}}{=} \pi_s + \pi_{s+1} + \pi_{s+2} + \cdots \tag{2.24}$$

est la fraction du temps pendant laquelle les s serveurs sont occupés. Pendant cette période, les clients arrivant dans le système doivent attendre. Elle est connue sous le nom de deuxième formule de Erlang. Les calculs donnent :

$$\boxed{C(s,a) = \frac{\dfrac{a^s}{s!} \times \dfrac{s}{s-a}}{\dfrac{a^s}{s!} \times \dfrac{s}{s-a} + \displaystyle\sum_{n=0}^{s-1} \frac{a^n}{n!}}} \tag{2.25}$$

Exercice 2.11 Un organisme public est ouvert, chaque jour ouvrable, de 9h à 17h sans interruption. Il accueille, en moyenne, 64 usagers par jour; un guichet unique sert à traiter le dossier de chaque usager, ceci en un temps moyen de 2,5 minutes. Les usagers si nécessaire, font la queue dans l'ordre de leur arrivée; même si la queue est importante, on ne refuse aucun usager. Une étude statistique a permis de conclure que la durée aléatoire des services suit une loi exponentielle et que le régime les arrivées des usagers forment un processus de Poisson.

1. Donner la notation de Kendall de cette file.
2. Donner l'expression de la probabilité invariante π_k, donner la justification de son existence.
3. Quel sont les temps moyens passés : à attendre ? dans l'organisme par chaque usager ?
4. Quelles sont les probabilités qu'il n'arrive aucun client entre 15H et 16H ? Que 6 clients arrivent entre 16H et 17H ?
5. Quelle est, en moyenne et par heure, la durée pendant laquelle l'employé du guichet ne s'occupe pas des usagers ?
6. Quelle est la probabilité d'observer une file d'attente de 4 usagers, derrière celui en cours de service ?

Exercice 2.12 Une clinique dispose d'un service d'urgence tenu par un seul médecin. Les malades se présentent selon un processus de Poisson de taux λ égal à 96 malades par jour (24 heures), et les durées des soins sont indépendantes, et suivent une loi exponentielle de moyenne égale à 12 minutes pour chaque malade. Les malades sont soignés dans le cabinet du médecin suivant l'ordre d'arrivée et il n'y a pas de limitation de place dans le service d'urgence.

1. Pour le système d'attente représenté par le nombre de malades présents à l'instant t, montrer que la condition d'ergodicité est vérifiée et calculer la probabilité qu'il y ait n malades dans le système (file + service) en régime stationnaire.

2. Déterminer les paramètres suivants :
   (a) le nombre moyen de malades dans le système,
   (b) le nombre moyen de malades en attente,
   (c) le temps moyen de présence dans le système,
   (d) le temps moyen d'attente.
3. On souhaite que le nombre moyen de malades en attente dans la salle d'attente soit $\leq 1/2$. A partir de quelle durée moyenne des soins cette condition est-elle vérifiée ?

Exercice 2.13 Les clients de la banque PICSOU arrivent au hasard à raison d'un client toutes les 4 minutes. La durée de service demandé par ces clients est une v.a de loi exponentielle de durée moyenne de durée 3 mn (il n'y a qu'un serveur).

Le directeur de la banque Picsou veut connaître :

1. la probabilité pour que la durée de service réclamé, par un client quelconque qui arrive excède 20 minutes,
2. le nombre moyen de clients qui attendent (effectivement) dans la file.

Exercice 2.14 Une importante maternité accueille des femmes enceintes qui sont arrivées à terme et viennent accoucher et donner naissance à leur bébé. L'occupation moyenne d'une salle de travail est de 6 heures pour un accouchement. Un statisticien a déterminé que la loi d'arrivée des futures mamans dans une maternité pour y accoucher, peut être approximée de façon satisfaisante, par une loi de Poisson, (il se présente en moyenne 24 femmes par jour) et que celle de l'occupation de la salle de travail peut l'être par une loi exponentielle. Leurs taux respectifs valent λ et μ.

Le but est de déterminer le nombre N de salles de travail (et, par conséquent le nombre minimal de sages-femmes devant se trouver dans la maternité), de telle sorte que la probabilité pour que toute les salles soient occupées soit inférieure à un centième : une femme qui arriverait dans ce cas serait dirigée vers une autre maternité, ce que l'on désire éviter à l'extrême.

1. Donner la valeur numérique de λ et μ.
2. Montrer que le système d'attente est un processus de naissance et de mort, comportant $N+1$ états, numérotés de0 à N. A quoi correspondent, ici une naissance et une mort ? Donner la signification de l'état k, exprimer λ_k en fonction de λ et μ_k en fonction de μ. Tracer le graphe associé et évaluer les arcs par les probabilités de transition.
3. La probabilité pour que le système soit, en régime permanent, dans l'état k est notée π_k. Calculer π_k en fonction de π_0 , puisπ_0.
4. Quel est l'état pour lequel toutes les salles sont occupées ; quelle est sa probabilité ? Trouver le nombre de salles de travail que devra comporter la clinique, de sorte que la probabilité pour qu'elles soient toutes occupées soit inférieure à 0,01.

Exercice 2.15 Le parking d'un supermarché peut contenir N automobiles. Le processus d'arrivée des automobiles est poissonnien de paramètre λ. Le temps moyen de présence d'un véhicule est T (loi exponentielle négative). Quand les N places du parking sont occupées les véhicules vont se garer ailleurs.

1. Modéliser par une chaîne de Markov.
2. Indiquer la formule donnant la proportion du temps pendant laquelle le parking est saturé.

3. Indiquer la formule donnant le nombre moyen de véhicules parqués.

Exercice 2.16 Un grand cabinet d'avocats propose un service gratuit de conseils. Chaque jour un avocat est détaché dans ce service. Un conseil demande en moyenne un quart d'heure et sa durée suit une loi exponentielle négative. Une étude statistique a montré que les clients arrivent au rythme de 8 par heure, ces arrivées sont poissonniennes. On ne souhaite pas avoir une file d'attente importante qui perturberait le fonctionnement du cabinet, aussi on n'accepte que deux personnes en attente.

1. Modéliser le problème.
2. Déterminer la probabilité invariante (stationnaire) π en justifiant son existence.
3. Quel est le nombre moyen de clients présents dans le système ?
4. Quelle est la probabilité pour un client d'être servi sans attendre ?
5. Au bout de quelques mois de fonctionnement de ce service, on s'est aperçu que ces clients précédents reviennent ensuite (en clients payants évidemment). On décide donc de modifier le service et on y affecte 3 avocats, et on supprime la file d'attente (un client qui arrive lorsque les trois avocats sont occupés doit partir). Quel doit être alors le temps du conseil pour que les trois avocats soient occupés simultanément 40% du temps ?

Exercice 2.17 A l'infirmerie d'un internat, 2 étudiants se présentent chaque jour, en moyenne, pour y recevoir des soins (les arrivées se font suivant un processus de Poisson). Ces étudiants reçoivent un traitement qui leur impose de rester en moyenne 3 jours alités (on suppose que les durées de séjour sont des variables aléatoires distribuées exponentiellement).

1. Quelle est en régime stationnaire (vous déterminerez la condition d'ergodicité) la loi de probabilité du nombre d'étudiants alités ? En déduire le nombre moyen d'étudiants alités.
2. A l'infirmerie, il y a s lits confortables et un nombre illimité de lits non confortables. Sachant que les s plus anciens malades ont un lit confortable, quelle est la probabilité pour un étudiant arrivant à l'infirmerie de ne pas trouver de lit confortable ?
3. En fait, le nombre de lits n'est pas illimité, et le responsable de l'infirmerie ne désire utiliser au maximum, que les s lits confortables. Quel modèle doit–on utiliser ? Donner l'expression et la valeur de la probabilité de refuser des malades à l'infirmerie avec $s = 14$?

Exercice 2.18 Le temps passé par un client à une caisse de grand magasin est supposé de loi exponentielle de moyenne 2 minutes. Il y a 10 caisses sont ouvertes en permanence et l'on suppose que le flot d'arrivées des clients aux caisses est poissonnien de moyenne λ ; on suppose aussi que les caisses sont utilisées au maximum par les clients, c'est à dire qu'une caisse ne peut pas être inoccupée alors que des clients attendent à une autre (en fait, il n'y a qu'une seule file d'attente).

1. Quel est le nombre maximum de clients par heure pouvant se présenter aux caisses tel qu'il y ait un régime d'équilibre dans ce système (ergodicité) ?
2. On mesure l'efficacité du système à la probabilité qu'un client trouve une caisse d'inoccupée. Quel est le nombre maximum de clients par heure pouvant se présenter aux caisses tel que cette efficacité soit 0,9 ?
3. En fait on observe, en moyenne, 10 clients par minute se présentant aux caisses. Combien doit-on ouvrir de caisses pour garder une efficacité de 0,8 ?

Chapitre 3

Sureté de fonctionnement

Exercice 3.1 On considère un système à *redondance active* formé de 4 éléments en parallèle, chacun d'eux ayant des caractéristiques identiques, en particulier un taux de défaillance constant égal à λ. Les éléments sont vendus par groupe de deux éléments mis en parallèle. Le système est donc formé de deux groupes. Il n'y a qu'un seul réparateur qui a pour consigne de ne commencer une réparation que lorsque des deux éléments d'un même groupe sont défaillants. Dans ce cas, la remise en service du groupe défaillant est effectuée lorsque la réparation les deux éléments est terminée. Le temps de la réparation (remise en service comprise) d'un groupe suit une loi exponentielle de paramètre $\mu/2$.

1. Dessiner l'automate correspondant au système, en indiquant clairement la signification de chaque état.
2. Ecrire les équations de balance permettant de calculer la distribution stationnaire. Vérifier que lorsque $\lambda = \mu$, la distribution stationnaire est

$$\pi = (1/65, 4/65, 4/65, 8/65, 16/65, 32/65)$$

3. Calculer la limite de la disponibilité $A(t)$ lorsque $t \to \infty$. Comparer cette disponibilité avec la disponibilité d'un système de quatre éléments mis en parallèle et réparables séparément selon un taux $\mu = \lambda$.
4. Calculer les temps moyens MTTR, MUT et MTBF lorsque $\lambda = \mu$.

Exercice 3.2 On considère un système à *redondance passive* formé de 2 éléments en parallèle, chacun d'eux ayant des caractéristiques identiques. La durée de bon fonctionnement d'un élément suit une loi exponentielle de paramètre λ. Deux types de panne peuvent se produire:

- panne bénigne avec probabilité p,
- panne grave avec probabilité $1 - p$.

Dans ce cas, la théorie nous dit que l'arrivée des pannes bénignes pour un élément seul est gouvernée par un processus de Poisson de paramètre λp et celle des pannes graves par un processus de Poisson de paramètre $\lambda(1 - p)$.

Les temps de réparation suivent une distribution exponentielle dont le paramètre dépend du type de panne:

- α si la panne est bénigne,

- β si la panne est grave ($\beta < \alpha$).

Il y a un réparateur disponible pour chaque type de panne, une panne de chaque type pouvant être réparée à la fois.

1. Définir les états du système et dessiner le graphe des transitions.
2. Calculer la disponibilité stationnaire du système si $p = q = 1/2$ et $\alpha = 2\beta = 2\lambda$.
3. Calculer en fonction de la distribution stationnaire π les nombres MTTR, MUT et MTBF. Que deviennent les formules trouvées dans le cas particulier étudié à la question précédente ?
4. Calculer le MTTF toujours dans le même cas particulier.

Exercice 3.3 On considère un système comportant 2 composants identiques en *redondance passive*. Ce système est observé régulièrement au début de chaque heure. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, les deux composants fonctionnent correctement. Il n'y a qu'un seul réparateur.

Dans la suite, le temps t est un entier positif ou nul. Pour tout $t \in \mathbb{N}$, la probabilité qu'un composant tombe en panne entre les instants t et $t + 1$ est notée a. De même, la probabilité que la réparation d'un composant se termine entre les instants t et $t+1$ est notée b. On posera $q = a/b$.

1. Modèliser par une chaine de Markov.
2. Calculer la distribution *stationnaire* en fonction de q.
3. Calculer $A(\infty)$, MTTR, MTTF, MUT, MTBF en fonction de a et b. Donner les résultats numériques lorsque $a = \frac{1}{40}$ et $b = \frac{1}{10}$.

Indication – Soit P la matrice de transition d'une chaine de Markov en temps discret comportant n états notés $1, 2, \ldots, n$. On suppose que seul l'état n est *absorbant*. Soit t_i le temps *moyen* pour atteindre l'état absorbant en partant de l'état i. Alors

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considère le système en temps continu, obtenu à partir du système précèdent, en prenant pour nouveau *pas de temps* une durée infiniement petite $\varepsilon > 0$ et en posant $a = \lambda\varepsilon$ et $b = \mu\varepsilon$.

1. Modèliser par une chaine de Markov.
2. Calculer la distribution *stationnaire* en fonction de q.
3. Calculer $A(\infty)$, MTTR, MTTF, MUT, MTBF en fonction de λ et μ. Donner les résultats numériques lorsque $\lambda = \frac{1}{40}$ et $\mu = \frac{1}{10}$.

Indication – Un bonus sera donné aux candidats qui savent éviter les calculs inutiles.

Exercice 3.4 On considère un système comportant 2 composants identiques en *redondance passive*. On suppose que la détection de la panne d'un composant, réalisée automatiquement par un logiciel de surveillance, prend un temps *aléatoire* distribué selon la loi exponentielle de paramètre $\alpha = 100$. Lorsqu'une panne est détectée sur un composant, on active instantannément l'autre composant dés que ce dernier est en état de marche.

Il n'y a qu'un seul réparateur et le temps de remise en service est compté dans le temps de réparation. Le taux de défaillance d'un composant est $\lambda = 1/10$ et le taux de réparation est $\mu = 1$, le temps étant mesuré en heures.

1. Quel est le temps moyen pour détecter une panne?
2. Modèliser par une chaine de Markov et dessiner l'automate *sans* que les flèches se croisent. On indiquera clairement dans un tableau annexe le codage et la signification des états utilisés.
3. Calculer $A(\infty)$, MDT, MUT, MTBF en fonction de la distribution stationnaire $\pi = (\pi_0, \pi_1, \cdots)$ et des taux α, λ et μ. Le MDT (mean Down Time) est la durée moyenne d'indisponibilité du système (détection de la panne + réparation éventuelle d'un composant).
4. Calculer numériquement la distribution *stationnaire*. En déduire les valeurs numériques des grandeurs calculées à la question précèdente.

Annexe A

Variables aléatoires

Intuitivement, une variable *aléatoire* est une variable dont les valeurs sont aléatoires (liées au hasard). L'ensemble de ces valeurs possibles est un sous–ensemble de $\mathbb{R}^n$. Ce sous–ensemble peut être soit *discret*, soit *continu*. Par exemple, le nombre d'accidents pendant un an dans une entreprise est une variable discrète à valeurs dans l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$. D'un autre coté, l'intervalle de temps entre deux accidents consécutifs est une variable aléatoire continue à valeurs dans l'ensemble des nombres réels positifs $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Dans ce cours, nous n'utiliserons pratiquement que des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$; dans chaque cas, $n = 1$.

A.1 Brefs rappels sur les espaces probabilisés

Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega,\mathcal{A},p)$ pour lequel

- Ω est l'ensemble des *évènements élémentaires*.
- $\mathcal{A}$ est l'ensemble des évènements pour lesquels la probabilité est définie. Un évènement est un sous–ensemble quelconque de Ω mais il peut arriver que pour certains d'entre eux, la probabilité ne soit pas définie. On suppose que l'ensemble $\mathcal{A}$ est une algèbre de Boole, c'est à dire que l'union[1] et l'intersection de deux éléments de $\mathcal{A}$ est encore dans $\mathcal{A}$. On suposera de plus que $\emptyset \in \mathcal{A}$ et que pour tout $E \in \mathcal{A}$, le complémentaire de E dans Ω est un évènement (appelé évènement *contraire* de E) qui appartient aussi à $\mathcal{A}$. Soient $A,B \in \mathcal{A}$. On écrira souvent $(A \text{ et } B)$ à la place de $(A \cap B)$ ainsi que $(A \text{ ou } B)$ à la place de $(A \cup B)$.
- $p : \mathcal{A} \to [0,1]$ est une *mesure* des évènements qui est un nombre réel compris entre 0 et 1. On suppose que

$$\left\{\begin{array}{rcl} p(\emptyset) & = & 0, \\ p(\Omega) & = & 1, \\ p(\bigcup_i A_i) & = & \sum_i p(A_i) \qquad \forall A_i \in \mathcal{A} \text{ tels que } A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j). \end{array}\right. \tag{A.1}$$

Exemple – On jette un dé. Le résultat est un évènement élémentaire. On a donc $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. On pose $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. L'évènement "tirer un nombre pair" est représenté

1. la théorie de la mesure exige que lorsque $A_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ alors $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$

par l'ensemble $E = \{2,4,6\}$. Si l'on suppose que chaque évènement élémentaire a la même probabilité de se réaliser, il faut poser $p(E) = 1/6 \ \mathrm{card}(E)$ pour tout $E \subset \mathcal{A}$. Ainsi $p(E) = 3/6$ lorsque $E = \{2,4,6\}$. □

Exemple – On jette deux dés. Le résultat d'un lancé est un couple de deux nombres entiers compris entre 1 et 6, ce qui représente 36 cas possibles. On a donc $\Omega = \{(x,y) \mid 1 \leq x,y \leq 6\}$. On pose $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$. Si l'on suppose que chaque évènement élémentaire a la même probabilité de se réaliser, il faut poser $p(E) = 1/36 \ \mathrm{card}(E)$ pour tout $E \subset \mathcal{A}$. L'évènement "tirer une somme égale à trois" correspond à l'ensemble $E = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ dont la probabilité est $3/36$. □

Exemple – On jette un flèchette sur une cible de dimension finie. Chaque point de la cible est un évènement élémentaire. Un ensemble de points est un évènement. Prenons comme unité de surface, la surface totale de la cible. L'application $p : E \to p(E)$ en prenant pour $p(E)$ l'aire de l'ensemble E, vérifie les axiomes des probabilités. Il existe évidemment bien d'autres lois de probabilités possibles. La théorie de la *mesure* nous dit que la surface de certains sous–ensembles de Ω (existant dans l'imaginaire des mathématiciens) n'est pas bien définie. A priori, les rectangles ont une surface bien définie: on dira qu'ils sont mesurables. Par suite, tout ensemble formé d'une réunion dénombrable de rectangles disjoints est mesurable. On prendra pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de la cible qui sont *mesurables*. □

Une variable aléatoire (v.a.) est une application de Ω dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple, à tout point de la cible de coordonnées x et y, on associe le couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a ainsi construit une v.a. continue à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. On aurait pu choisir la distance au centre $\sqrt{x^2 + y^2}$ et obtenir ainsi une v.a. continue à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Enfin, on aurait pu partitionner la cible en un nombre fini de sous–ensembles disjoints que l'on aurait numérotés. L'application qui, à tout point de la cible, associe son numéro est une v.a. (discrète) à valeurs dans un sous–ensemble de $\mathbb{N}$.

A.1.1 Probabilités conditionnelles

Soit $(\Omega,\mathcal{A},p)$ un espace probabilisé et un évènement $A \in \mathcal{A}$. Alors, l'application p_A :

$$p_A : X \in \mathcal{A} \to p_A(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{p(X \cap A)}{p(A)} \tag{A.2}$$

vérifie les axiomes des probabilités. On a alors $p_A(A) = 1$, autrement dit l'évènement A est certain pour cette nouvelle loi.

Cette probabilité dite probabilité *conditionnelle* représente la probabilité que l'évènement X se réalise sachant que l'évènement A est certain (déja réalisé), ce qui est traditionnellement noté $p(X \mid A)$.

Deux évènements A et B sont dits *indépendants* lorsque $p(A \mid B) = p(A)$. On en déduit alors la relation équivalente

$$p(A \text{ et } B) = p(A)\ p(B). \tag{A.3}$$

A.2 Variables aléatoires discrètes

A.2.1 Définition

Dans cette section, on ne considèrera que des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Une telle variable aléatoire X est donc la donnée d'une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$, c'est à dire d'une suite de nombres réels positifs ou nuls $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n p_n = 1$. Il faut comprendre $\text{Prob}\{X = n\} = p_n$.

A.2.2 Somme et produit de deux variables aléatoires

La somme de deux variables aléatoires X et Y est une variables aléatoire dont la distribution est donnée par la formule

$$\left\{\begin{array}{lcl} \text{Prob}\{X+Y=n\} & = & \displaystyle\sum_{i+j=n} \text{Prob}\{X=i\}\,\text{Prob}\{Y=j \mid X=i\}\,, \\ \text{Prob}\{X\times Y=n\} & = & \displaystyle\sum_{ij=n} \text{Prob}\{X=i\}\,\text{Prob}\{Y=j \mid X=i\}\,. \end{array}\right. \tag{A.4}$$

Lorsque les deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la condition devient superflue. Examinons la formule donnant $\text{Prob}\{X+Y=n\}$. Soient $p_i = \text{Prob}\{X=i\}$, $q_j = \text{Prob}\{Y=j\}$ et $r_n = \text{Prob}\{X+Y=n\}$. Le nombre r_n est donné par une formule, dite de *convolution additive*, identique à celle que l'on obtient en calculant le coefficient de x^n dans le produit de deux polynômes $P(x) = \sum_i p_i x^i$ et $Q(x) = \sum_j q_j x^j$, à savoir

$$r_n = \sum_{i+j=n} p_i\, q_j. \tag{A.5}$$

A.2.3 Moyenne, variance et covariance

On pose par définition

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{E}(X) & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\ \text{Prob}\{X=n\}\,, \\ \sigma^2 = \text{Var}(X) & = & \text{E}((X-m)^2) \qquad \text{avec } m = \text{E}(X), \\ \text{Cov}(X,Y) & = & \text{E}([X-\text{E}(X)][Y-\text{E}(Y)]). \end{array}\right. \tag{A.6}$$

Le nombre réel $\text{E}(X)$ est appelé *moyenne* ou encore *espérance* de X. L'*écart–type* σ est par définition égal à la racine carrée de la *variance*.

A.2.3.1 Propriétés (admises)

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\mathrm{E}(X+Y) & = & \mathrm{E}(X)+\mathrm{E}(Y) \\
\mathrm{Cov}(X,Y) & = & \mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) \\
\mathrm{Var}(X) & = & \mathrm{Cov}(X,X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2 \\
\mathrm{E}(aX+b) & = & a\mathrm{E}(X)+b \qquad \text{pour tout } a,b\in\mathbb{R} \\
\mathrm{Var}(aX+b) & = & a^2\mathrm{Var}(X) \qquad \text{pour tout } a,b\in\mathbb{R} \\
\mathrm{Var}(X+Y) & = & \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y) \\
\mathrm{Cov}(X,Y) & = & 0 \qquad \text{si } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes}
\end{array}\right. \tag{A.7}$$

Soit X une variable aléatoire de moyenne m et d'écart–type σ. Il est facile d'utiliser une transformation affine $X \to aX+b$ pour ramener la moyenne à zéro et l'écart–type à un. On pose $U \stackrel{\text{def}}{=} (X-m)/\sigma$. Alors $\mathrm{E}(U)=0$ et $\mathrm{Var}(U)=1$. La variable U est appelée *variable centrée réduite*.

A.2.3.2 Géométrie des variables aléatoires

Les variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ forment un espace vectoriel car une combinaison linéaire $aX+bY$ (pour $a,b\in\mathbb{R}$) de deux variables aléatoires est encore une variable aléatoire. La covariance est une forme bilinéaire symétrique qui joue le rôle du produit scalaire de deux vecteurs. Lorsque deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes, $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$, ce qu'on interprête comme une condition d'orthogonalité. La réciproque est fausse : la nullité de la covariance n'entraine par l'indépendance.

A.2.4 Fonction génératrice d'une variable aléatoire

A.2.4.1 Transformée en z d'une suite de nombres

La transformée en z est utilisée pour calculer la moyenne et la variance d'une variable aléatoire discrète. Elle nous servira aussi à résoudre les équations d'état des chaines de Markov en temps discret.

Soit $u=(u_0,u_1,u_2,\ldots)$ une suite quelconque de nombres. Par définition, la *transformée en z* de la suite u est la fonction de la variable complexe z,

$$\widehat{u}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n\, z^n = u_0+u_1z+u_2z^2+\cdots \tag{A.8}$$

En particulier si la suite u_n est constante, alors $\widehat{u}(z)=u_0+u_0z+u_0z^2=\frac{u_0}{1-z}$.

La principale opération sur les suites est l'opération de décalage (*shift* en anglais). Cette opération est notée σ. Par définition, on pose

$$(\sigma u)_n = u_{n+1} \tag{A.9}$$

Ainsi la suite $\sigma u=(u_1,u_2,u_3\ldots)$. Remarquons que le premier élément de la suite u est perdu.

Examinons comment cette opération de décalage sur une suite u se traduit sur sa transformée en z. On pose

$$\begin{aligned}\widehat{\sigma u}(z) &\stackrel{\text{def}}{=} u_1 + u_2 z + u_3 z^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n+1} z^n \\ &= \frac{1}{z}(u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \cdots).\end{aligned}$$

Finalement

$$\widehat{\sigma u}(z) = \frac{1}{z}\Big(\widehat{u}(z) - u_0\Big). \tag{A.10}$$

Cette formule est fondamentale car elle permet de calculer la transformée en z d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire quelconque. Examinons, par exemple, la suite de Fibonacci qui est définie comme suit

$$\left\{\begin{aligned} u_{n+2} &= u_{n+1} + u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \\ u_0 &= 0; \quad u_1 = 1 \end{aligned}\right. \tag{A.11}$$

Cette suite u vérifie donc la relation $\sigma^2 u = \sigma u + u$. Le calcul du shift sur sa transformée en z grâce à la formule (A.10) donne $\widehat{\sigma u}(z) = \frac{1}{z}\widehat{u}(z)$ et $\widehat{\sigma^2 u}(z) = \frac{1}{z}(\frac{1}{z}\widehat{u}(z) - 1)$. La relation de récurrence (A.11) impose l'équation

$$\frac{1}{z}\Big(\frac{1}{z}\widehat{u}(z) - 1\Big) = \frac{1}{z}\widehat{u}(z) + \widehat{u}(z)$$

permettant de calculer $\widehat{u}(z)$ en fonction de z. On trouve

$$\widehat{u}(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}.$$

A.2.4.2 Définition des fonctions géneratrices

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières (positives ou nulles). On pose $p_k = \mathrm{Prob}\,\{X = k\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La *fonction génératrice* de X est définie par la série entière $f_X(z) = \mathrm{E}(z^X)$. C'est la transformée en z de la suite p_k :

$$f_X(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots \tag{A.12}$$

On vérifie immédiatement que $f_X(0) = p_0$ et $f_X(1) = 1$. Comme les p_k sont tous inférieurs ou égaux à un, la série est convergente pour $|z| < 1$.

D'autre part, on peut retrouver la loi de probabilité de X en partant de sa fonction génératrice $f_X(z)$ par la formule de Taylor

$$p_k = f^{(k)}(0)/k! \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

A.2.4.3 Propriétés élémentaires

Proposition A.1 (moyenne et variance) *Soit une variable aléatoire X entière dont la fonction génératrice est $f(z)$. Posons $X^{\underline{n}} \stackrel{\text{def}}{=} X(X-1)\cdots(X-n+1)$. Alors $\mathrm{E}(X^{\underline{n}}) = f^{(n)}(1)$. En particulier, $\mathrm{E}(X) = f'(1)$ et $\mathrm{E}(X(X-1)) = f''(1)$ sachant que les dérivées première et seconde de la fonction f sont désignées par f' et f''.*

Preuve – laissée en exercice. □

Proposition A.2 *Si X et Y sont deux variables aléatoires entières* indépendantes, *alors la fonction génératrice de $X+Y$ est égale au produit des fonctions génératrices de X et Y.*

Preuve – Soient $f_X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$, $f_Y(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j$ et $f_{X+Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k z^k$. On obtient d'après (A.5) la loi de probabilité de $X+Y$ en effectuant le produit de convolution $r_n = \sum_i p_i q_{n-i}$. Par suite, la série $\sum_n r_n z^n$ correspond exactement au produit des séries $f_X(z)$ et $f_Y(z)$. Donc $f_{X+Y}(z) = f_X(z)\ f_Y(z)$ pour tout z. □

A.2.5 Lois discrètes usuelles

Pour une v.a. X distribuée selon une loi de probabilité p_k, on donne sa fonction génératrice $\mathrm{E}(x^X)$ qui est définie comme la transformée en z de la suite p_k. On en déduit la moyenne et la variance de X à l'aide de la proposition A.1:

$$\mathrm{Var}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = f''(1) + f'(1) - (f'(1))^2. \tag{A.13}$$

A.2.5.1 Epreuve de Bernouilli

La v.a. X prend la valeur 1 avec la probabilité p et prend la valeur 0 avec la probabilité $1-p$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Prob}\,\{X=0\} & = & q, \quad \mathrm{Prob}\,\{X=1\} = p \text{ avec } q = 1-p \\ \mathrm{E}(z^X) & = & zp+q \\ \mathrm{E}(X) & = & p \\ \mathrm{Var}(X) & = & pq \end{array}\right. \tag{A.14}$$

A.2.5.2 Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

On effectue n épreuves de Bernouilli indépendantes. La v.a. X compte le nombre de succès. Ainsi p_k est la probabilité d'obtenir k succès en n tentatives.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathrm{Prob}\,\{X=k\} & = & \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \text{ avec } q = 1-p \\ \mathrm{E}(z^X) & = & (zp+q)^n \\ \mathrm{E}(X) & = & np \\ \mathrm{Var}(X) & = & npq \end{array}\right. \tag{A.15}$$

Exercice A.1 Effectuer le calcul de la moyenne et de la variance en utilisant la proposition A.1.

A.2.5.3 Loi géométrique

On effectue des épreuves de Bernouilli indépendantes jusqu'à ce qu'on obtienne un premier succès. La v.a. X compte le nombre d'épreuves qu'il a fallu effectuer. Ainsi p_k est la probabilité d'obtenir un premier succès à la k^{ieme} tentative.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{Prob}\{X=k\} &=& (1-p)^{k-1}p \text{ pour } k=1,2,\ldots \\ \text{E}(z^X) &=& \dfrac{pz}{1-(1-p)z} \\ \text{E}(X) &=& \dfrac{1}{p} \\ \text{Var}(X) &=& \dfrac{1-p}{p^2} \end{array}\right. \tag{A.16}$$

Exercice A.2 Effectuer le calcul de la moyenne et de la variance en utilisant la proposition A.1.

A.2.5.4 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

La loi de Poisson est parfois appelée *loi des évènements rares* car c'est la limite de la loi binomiale $\mathcal{B}(b,p)$ lorsque le nombre n d'épreuves tend vers l'infini, que la probabilité p de succès au cours d'une épreuve tend vers zéro et que le produit np tend vers une constante λ. Citons comme exemple possible d'application:

- Loi du nombre de suicides par an dans un pays donné
- Loi du nombre d'appels téléphoniques pendant un temps donné
- Loi du nombre de pièces défectueuses dans une livraison importante, la production étant de bonne qualité etc.

La loi est construite à partir du développement de Taylor $\exp(\lambda) = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \cdots$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{Prob}\{X=k\} &=& e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!} \text{ pour } k=0,1,2,\ldots \\ \text{E}(z^X) &=& e^{\lambda(z-1)} \\ \text{E}(X) &=& \lambda \\ \text{Var}(X) &=& \lambda \end{array}\right. \tag{A.17}$$

Exercice A.3 Effectuer le calcul de la moyenne et de la variance en utilisant la proposition A.1.

Proposition A.3 *La somme de deux variables aléatoires poissonniennes de paramètres respectifs λ et μ est une variable poissonnienne de paramètre $\lambda + \mu$.*

Preuve – On utilise la proposition A.2. Le calcul donne

$$e^{\lambda(z-1)} \times e^{\mu(z-1)} = e^{(\lambda+\mu)(z-1)}$$

□

Théorème A.1 *Soit λ un réel positif. Notons $\mathcal{B}(n,p)$ la loi de Bernouilli (de moyenne np) correspondant à n épreuves indépendantes, chacune avec une probabilité de succès égale à p. Notons $\mathcal{P}(\lambda)$ la loi de Poisson de moyenne (paramètre) λ. Alors,*

$$\mathcal{P}(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{B}(n,\lambda/n).$$

Preuve – Considérons la fonction génératrice de la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\lambda/n)$ (voir formules (A.15))

$$f(z) = (pz+q)^n = \left(\frac{\lambda}{n}z + 1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{\lambda}{n}(z-1)\right)^n$$

On sait que $\exp(x) = \lim_{n \to \infty}(1+x/n)^n$. Par suite la fonction $f(z)$ tend vers la fonction génératrice de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ qui vaut $\exp(\lambda(z-1))$. □

A.3 Variables aléatoires continues

Dans toute cette section, les variables aléatoires sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. La plupart des définitions et propriétés des variables discrètes restent valables. Les seules différences viennent du fait que les sommes sont remplacées par des intégrales pour une certaine densité de probabilité. La fonction génératrice $\mathrm{E}(z^X)$ d'une v.a. X est remplacée par la *transformée de Laplace* $\mathrm{E}(e^{-sX})$. On fait le lien entre ces deux définitions en posant $z = e^{-s}$.

A.3.1 Définitions de base

Une variable aléatoire (v.a) à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ est la donnée d'un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},p)$ pour lequel $\Omega = \mathbb{R}_{\geq 0}$.

On définit la *fonction de répartition* de la v.a. X

$$F_X(x) = \mathrm{Prob}\{X < x\} \tag{A.18}$$

Les axiomes des probabilités impliquent $F_X(0) = 0$ et $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$. La dérivée au point x de F_X qui est notée $f_X(x)$ est appelée *densité de probabilité* de la v.a. X. On en déduit pour $a,b \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$\mathrm{Prob}\{a \leq X < b\} = F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx \tag{A.19}$$

Pour un intervalle $[x,x+dx]$ infiniement petit, on en déduit que

$$f_X(x)dx = \mathrm{Prob}\left\{x \leq X < x+dx\right\}.$$

La *moyenne* d'une v.a. X est donnée par l'intégrale (sous réserve de convergence)

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\infty x f(x) dx \tag{A.20}$$

A.3.2 Changement de variable

Soit φ une fonction croissante de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ et X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Alors $Y = \varphi(X)$ est une v.a. telle que $Y < \varphi(x) \iff X < x$. On en déduit que les fonctions de répartition de X et Y notées ici F et G sont liées par la relation

$$F(x) = G(\varphi(x)) \tag{A.21}$$

Les densités de probabilité correspondantes notées f et g s'obtiennent en dérivant cette relation: $f(x) = g(\varphi(x)).\varphi'(x)$. En posant $y = \varphi(x)$, on déduit

$$g(y) = \frac{f(x)}{\varphi'(x)} = \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{\varphi'(\varphi^{-1}(y))} \tag{A.22}$$

Exemple – Soit $Y = \exp X \iff X = \log Y$. Alors

$$g(y) = \frac{f(x)}{e^x} = \frac{f(\log y)}{y}.$$

□

Exemple – Soit $Y = X^2 \iff 0 \leq X \leq \sqrt{Y}$. Alors

$$g(y) = \frac{f(x)}{2x} = \frac{f(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}.$$

□

A.3.3 La transformée de Laplace

La transformée de Laplace nous servira à résoudre les équations différentielles linéaires qui gouvernent les chaines de Markov en temps continu, à calculer la moyenne et la variance des variales aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Toutes les fonctions considérées dans cette section sont supposées des fonctions de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

Définition A.1 *Soit $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. La transformée de Laplace de la fonction f est la fonction notée $\widehat{f}$ définie par l'intégrale (sous réserve de convergence):*

$$\widehat{f}(s) = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx \qquad (s \geq 0). \tag{A.23}$$

La propriété fondamentale de la transformée de Laplace est

$$f'(x) \;=\; \frac{d}{dx}f(x) \Longrightarrow \widehat{f'}(s) = s\widehat{f}(s) - f(0). \qquad \text{(A.24)}$$

La transformée de Laplace permet donc de transformer les équations différentielles linéaires à coefficients constants en équations algébriques *non* différentielles.

Exemple – Calculer la transformée de Laplace de $y(x) = \exp(-\lambda x)$. La fonction $y(x)$ est complètement définie par l'eq. différentielle $y'(x) = -\lambda y(x)$ et par la condition initiale $y(0) = 1$. Sa transformée de Laplace $\widehat{y}(s)$ vérifie donc $s\widehat{y}(s) - 1 = -\lambda\widehat{y}(s)$, d'où l'on tire

$$\widehat{y}(s) = \frac{1}{s+\lambda}.$$

□

Exercice A.4 En utilisant la même méthode, calculer la transformée de Laplace de la fonction $y(x) = x^n$ en commançant par $n = 0$.

Citons une propriété intéressante de la transformée de Laplace, à savoir l'échange entre les limites en $x = 0$ et en $s = \infty$. On a

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} f(x) &= \lim\limits_{s \to 0} s\,\widehat{f}(s) \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) &= \lim\limits_{s \to \infty} s\,\widehat{f}(s) \\ \displaystyle\int_0^\infty f(x)dx &= \widehat{f}(0) \end{cases} \qquad \text{(A.25)}$$

A.3.3.1 Produit de convolution

Soient deux fonctions f et g de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Par définition, le produit de convolution $f * g$ est la fonction définie par l'intégrale

$$(f * g)(x) \;=\; \int_0^x f(x-t)g(t)dt. \qquad \text{(A.26)}$$

On démontre que ce produit est *associatif* et *commutatif.*

Théorème A.2 *La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions est égal au produit (ponctuel) des transformées de Laplace de chacune de ces fonctions, autrement dit* $\widehat{f * g}(s) = \widehat{f}(s)\widehat{g}(s)$.

Preuve – admise □

Ce produit de convolution intervient lorsque l'on considère la somme de deux v.a. indépendantes données par leur densité de probabilité.

Théorème A.3 *Soient deux v.a. indépendantes X et Y dont les densités sont les fonctions f et g. Alors la densité de $X + Y$ est égale au produit de convolution $f * g$.*

Ainsi l'associativité et la commutativité du produit de convolution correspond l'associativité et la commutativité de la somme de deux v.a. indépendantes.

Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dont la densité de probabilité est la fonction f. Soit $\widehat{f}$ la transformée de Laplace de f. On a alors

$$\mathrm{E}(e^{-sX}) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx \tag{A.27}$$

Le rapprochement des deux théorêmes A.2 et A.3 implique le

Corollaire A.1 *Soient* $\mathrm{E}(\exp(-sX))$ *et* $\mathrm{E}(\exp(-sY))$ *les transformées de Laplace des densités de deux v.a. indépendantes* X *et* Y*. Alors*

$$\mathrm{E}\left(e^{-s(X+Y)}\right) = \mathrm{E}\left(e^{-sX}\right) \times \mathrm{E}\left(e^{-sY}\right).$$

Preuve – Donnons un preuve directe de ce corollaire, sans utiliser les deux théorèmes précédents. Lorsque X et Y sont indépendantes, il en est de même pour les v.a. $A = \exp(-sX)$ et $B = \exp(-sY)$. On applique alors l'identité $\mathrm{E}(AB) = \mathrm{E}(A)\mathrm{E}(B)$. $\square$

Fonctions		Transformée de Laplace
dérivée	$\frac{d}{dt}f(t)$	$s\widehat{f}(s) - f(0)$
dérivée k^{ieme}	$\frac{d^k}{dt^k}f(t)$	$s^k\widehat{f}(s) - s^{k-1}f(0) - s^{k-2}f'(0) - \cdots - f^{(k-1)}(0)$
intégrale	$\int_0^t f(x)dx$	$\frac{1}{s}\widehat{f}(s)$
dilatation ($\lambda > 0$)	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lambda}\widehat{f}(s/\lambda)$
translation	$f(t - t_0)$	$\exp(-st_0)\widehat{f}(s)$
facteur polynomial	$(-t)^k f(t)$	$\frac{d^k}{ds^k}\widehat{f}(s)$
facteur exponentiel	$\exp(-\lambda t)f(t)$	$\widehat{f}(s+\lambda)$
Heaviside	$Y(t)$	$1/s$
Dirac	$\delta(t)$	1
exponentielle	$\lambda e^{-\lambda t}Y(t)$	$\frac{\lambda}{s+\lambda}$
gamma	$\frac{\lambda^\beta t^{\beta-1}e^{-\lambda t}}{\Gamma(\beta)}Y(t)$	$\frac{\lambda^\beta}{(s+\lambda)^\beta}$
sinus	$\sin(\omega t)Y(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
cosinus	$\cos(\omega t)Y(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

Tab. A.1 – *Transformée de Laplace de quelques fonctions et distributions*

Exercice A.5 Soit un quadrimoteur tel que chaque moteur a un taux de panne égal à λ. L'avion arrive à destination si au moins deux moteurs fonctionnent.

1. Calculer, en fonction de λ, la fiabilité $R(t)$ du quadrimoteur.
2. Calculer sa durée de vie moyenne τ.

A.3.3.2 Calcul des moments d'une variable aléatoire

Par définition, le moment d'ordre k d'une v.a. dont la densité est $f(x)$ vaut

$$\mathrm{E}(X^k) = \int_0^\infty x^k f(x)dx \tag{A.28}$$

La connaissance des moments d'ordre 1 et 2 d'une v.a. permet de calculer sa moyenne et sa variance. Nous allons voir que ces moments apparaissent dans le développement de Taylor (par rapport à s) de la transformée de Laplace de $f(x)$.

Proposition A.4 *Soit la transformée de Laplace* $\mathrm{E}(e^{-sX}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$. *Alors*

$$\mathrm{E}(e^{-sX}) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathrm{E}(x^k)\, \frac{s^k}{k!}. \tag{A.29}$$

PREUVE – On développe l'exponentielle : $\exp(-sx) = 1 - sx + x^2\frac{s^2}{2!} - \cdots$. □

EXEMPLE – Soit X une v.a. qui suit la loi exponentielle i.e. $\mathrm{Prob}\,\{X > x\} = \exp(-\lambda x)$. On a $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ dont la transformée de Laplace (voir table A.3.3.1) est

$$\widehat{f}(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda} = 1 - \frac{s}{\lambda} + \frac{s^2}{\lambda^2} - \cdots$$

La formule (A.29) donne $\mathrm{E}(X) = 1/\lambda$ et $\mathrm{E}(X^2) = 2/\lambda^2$. On en déduit la variance $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2 = 2/\lambda^2 - 1/\lambda^2 = 1/\lambda^2$. □

A.3.4 Lois continues usuelles

Pour une v.a. positive X distribuée selon la loi de probabilité dont la densité est notée $f(x)$, on calcule la transformée de Laplace $\mathrm{E}(e^{-sX})$ de cette densité, ce qui permet d'en déduire les valeurs de $\mathrm{E}(X)$ et de $\mathrm{Var}(X)$ conformément à la formule (A.29).

A.3.4.1 Loi uniforme sur l'intervalle $[0,a]$

Si la v.a. X est uniformément distribuée sur l'intervalle $[0,a]$, alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f(x) & = & 1/a \text{ pour } 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 \text{ sinon} \\ \mathrm{E}(e^{-sX}) & = & \dfrac{1-e^{-sa}}{sa} \\ \mathrm{E}(X) & = & \dfrac{a}{2} \\ \mathrm{Var}(X) & = & \dfrac{a^2}{12} \end{array} \right. \tag{A.30}$$

A.3.4.2 Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

On dit que la variable aléatoire réelle positive T suit une loi exponentielle de paramètre λ lorsque pour tout $t \geq 0$

$$\boxed{\mathrm{Prob}\{T > t\} = e^{-\lambda t}} \tag{A.31}$$

En résumé :

$$\begin{cases} f(t) &= \lambda e^{-\lambda t} \\ \mathrm{E}(e^{-sT}) &= \dfrac{\lambda}{s+\lambda} \\ \mathrm{E}(T) &= \dfrac{1}{\lambda} \\ \mathrm{Var}(T) &= \dfrac{1}{\lambda^2} \end{cases} \tag{A.32}$$

Caractère *sans mémoire* de la loi exponentielle: une variable aléatoire T est dite *sans mémoire* lorsque

$$\forall t,t_0 \geq 0, \quad \mathrm{Prob}\{T - t_0 > t \mid T > t_0\} = \mathrm{Prob}\{T > t\}. \tag{A.33}$$

Soit T la durée de vie d'un individu (mesurée en années pour fixer les idées). La condition (A.33) signifie qu'à tout age t_0, le temps qu'il lui reste à vivre, à savoir $T - t_0$ est une v.a. qui suit la même loi que T. Un tel individu demeure donc mortel mais ne vieillit pas car le nombre d'années qu'il a vécues n'influence pas le nombre d'années qu'il lui reste à vivre (le rêve !).

Proposition A.5 *Une variable aléatoire suit une loi est exponentielle si et seulement si cette variable est* sans mémoire.

Preuve – Posons $\mathrm{Prob}\{T > t\} = \Phi(t)$. On en déduit

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\{T - t_0 > t\} &= \mathrm{Prob}\{T > t + t_0\} = \Phi(t + t_0) \\ \mathrm{Prob}\{T - t_0 > t \mid T > t_0\} &= \frac{\Phi(t+t_0)}{\Phi(t_0)}. \end{aligned}$$

La condition (A.33) s'écrit alors

$$\frac{\Phi(t+t_0)}{\Phi(t_0)} = \Phi(t) \text{ soit } \Phi(t+t_0) = \Phi(t)\Phi(t_0).$$

Les seules solutions de cette équation sont les fonctions exponentielles de la forme $\Phi(t) = e^{-\lambda t}$. On a bien

$$e^{-\lambda(t+t_0)} = e^{-\lambda t} e^{-\lambda t_0}.$$

□

A.3.4.3 Loi de Erlang $\mathrm{E}_k(\lambda)$

Par définition, la loi de Erlang $\mathrm{E}_k(\lambda)$ est la loi suivie par la somme de k v.a. indépendantes chacune distribuées selon la loi exponentielle de paramètre λ. Ainsi, si des évènements aléatoires indépendants arrivent selon un processus de Poisson, alors la date T_k d'arrivée du k^{ieme} évènement est gouvernée par la loi de Erlang $\mathrm{E}_k(\lambda)$. En effet, $T_k = (T_1 - T_0) + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_k - T_{k-1})$ et l'on est dans l'hypothèse où les intervalles de temps $(T_{i+1} - T_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui séparent l'arrivée de deux évènements successifs sont indépendants et suivent une loi exponentielle de paramètre λ.

D'après le corollaire A.1, la transformée de Laplace de la densité de $\mathrm{E}_k(\lambda)$ s'obtient en élevant à la puissance k la transformée de Laplace de la loi exponentielle (voir table A.3.3.1) qui est $\lambda/(\lambda + s)$. Les formules $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}(X) + \mathrm{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$ permettent d'obtenir sans calcul la moyenne et la variance de la loi de Erlang. On trouve

$$\begin{cases} f(t) &= \dfrac{\lambda^k t^{k-1} e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \\ \mathrm{E}(e^{-sT}) &= \dfrac{\lambda^k}{(s+\lambda)^k} \\ \mathrm{E}(T) &= \dfrac{k}{\lambda} \\ \mathrm{Var}(T) &= \dfrac{k}{\lambda^2} \end{cases} \tag{A.34}$$

A.3.4.4 Loi gamma $\gamma(\lambda,\beta)$

La loi gamma est une généralisation de la loi de Erlang $\mathrm{E}_k(\lambda)$ lorsque k n'est plus un entier mais un nombre réel quelconque noté ici β. On utilise la fonction $\Gamma(\beta)$ qui se ramène à $(\beta - 1)!$ lorsque β est un entier positif. En résumé :

$$\begin{cases} f(t) &= \dfrac{\lambda^\beta t^{\beta-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\beta)} \\ \mathrm{E}(e^{-sT}) &= \dfrac{\lambda^\beta}{(s+\lambda)^\beta} \\ \mathrm{E}(T) &= \dfrac{\beta}{\lambda} \\ \mathrm{Var}(T) &= \dfrac{\beta}{\lambda^2} \end{cases} \tag{A.35}$$

La loi du χ^2 qui est trés utilisée dans les tests statistiques est un cas particulier de la loi gamma. Par définition, la loi χ^2_n à n degrés de liberté ($n \in \mathbb{N}$) est la loi suivie par la somme des carrés de n v.a. indépendantes distribuées selon la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On démontre que cette loi χ^2_n est égale à la loi $\gamma(\lambda,\beta)$ pour $\lambda = 1/2$ et $\beta = n/2$.

A.3.4.5 Loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$

Attribué et à Gauss et à Laplace, la loi normale est la plus connue des lois intervenant en statistique. Si la v.a. X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$, alors

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-m}{\sigma})^2} \\ \mathrm{E}(e^{-sX}) & = & e^{-ms} e^{\frac{1}{2}(\sigma s)^2} \\ \mathrm{E}(X) & = & m \\ \mathrm{Var}(X) & = & \sigma^2 \end{array}\right. \tag{A.36}$$

La variable centrée réduite $U = (X-m)/\sigma$ suit alors la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Les formules donnant la densité et sa transformée de Laplace se simplifient notablement

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \\ \mathrm{E}(e^{-sX}) & = & e^{\frac{1}{2}s^2} \\ \mathrm{E}(X) & = & 0 \\ \mathrm{Var}(X) & = & 1 \end{array}\right. \tag{A.37}$$

Proposition A.6 *La somme de deux v.a. indépendantes distribuées selon les lois normales $\mathcal{N}(m_1,\sigma_1)$ et $\mathcal{N}(m_2,\sigma_2)$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$ telle que $m = m_1 + m_2$ et $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$*

Preuve – On sait (corollaire A.1) que la transformée de Laplace de la somme de deux v.a. indépendantes est égal au produit de deux transformées de Laplace. Par suite, cette proposition se ramène à l'identité évidente entre exponentielles

$$e^{-m_1 s} e^{\frac{1}{2}(\sigma_1 s)^2} \times e^{-m_2 s} e^{\frac{1}{2}(\sigma_2 s)^2} = e^{-(m_1+m_2)s} e^{\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)s^2}$$

□

A.3.4.6 Loi log–normale

Une v.a. X à valeurs dans $]0,\infty[$ est dite suivre une loi *log–normale* de paramètres (m,σ) si la v.a. $Y = \log X$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma)$. Les calculs montrent que

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \dfrac{1}{x} \exp\left(-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\log x - m}{\sigma}\right)^2\right) \quad \text{pour } x > 0 \\ \mathrm{E}(e^{-sX}) & = & \text{intégrale non convergente} \\ \mathrm{E}(X) & = & e^{m+\sigma^2/2} \\ \mathrm{Var}(X) & = & e^{2m+\sigma^2}(e^{\sigma^2} - 1) \end{array}\right. \tag{A.38}$$

Le produit de deux v.a. indépendantes suivant une loi log–normale est distribuée selon une loi log–normale ; ceci est une conséquence de la proposition A.6.

La loi log–normale a trouvé un domaine d'application inattendu: la linguistique. En effet, le nombre de mots par phrase suit approximativement une loi log–normale.

A.3.4.7 Loi de Weibull $\mathcal{W}(t_0,\sigma,\beta)$

Cette loi dépend de trois paramètres réels strictement positifs. Elle est très intéressante car elle permet d'approximer un grand nombre de lois expérimentales.

Une v.a. T est dite suivre une loi de Weibull $\mathcal{W}(t_0,\sigma,\beta)$ si la v.a. $\left(\frac{T-t_0}{\sigma}\right)^\beta$ suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$. On a donc

$$\mathrm{Prob}\,\{T > t\} \quad = \quad \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\sigma}\right)^\beta\right) \qquad \text{pour } t > t_0. \tag{A.39}$$

Les calculs montrent que

$$\left\{\begin{array}{rcl} f(t) & = & \dfrac{\beta(t-t_0)^{\beta-1}}{\sigma^\beta}\exp\left(-\left(\dfrac{t-t_0}{\sigma}\right)^\beta\right) \\ \mathrm{E}(T) & = & t_0 + \sigma\Gamma\left(\dfrac{1+\beta}{\beta}\right) \\ \mathrm{Var}(T) & = & \sigma^2\left[\Gamma\left(\dfrac{2}{\beta}+1\right) - \Gamma^2\left(1+\dfrac{1}{\beta}\right)\right] \end{array}\right. \tag{A.40}$$

Exercice A.6 On considère un système à *redondance passive* formé de n éléments en parallèle, chacun d'eux ayant des caractéristiques identiques. La durée de bon fonctionnement d'un élément suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Soit T la durée de bon fonctionnement du système. Calculer la moyenne et l'écart–type de T.
2. Quelle est la loi de probabilité suivie par T ?
3. Indiquer, lorsque n est grand, une utilisation possible du théorème central limite.
4. On suppose que $n = 100$ et $\lambda = 1$. Calculer la probabilité pour que $T > 80$.

Exercice A.7 On considère un système formé de deux éléments non réparables, mis en parallèle. La durée de bon fonctionnement de chaque élément est une variable aléatoire distribuée uniformément sur l'intervalle [0,1].

1. Calculer la fiabilité $R(t)$ et le taux de défaillance $\lambda(t)$ du système lorsque les deux éléments sont en *redondance active*.
2. Calculer la densité de probabilité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes distribuées uniformément sur l'intervalle [0,1]. Représenter graphiquement cette densité ainsi que la fonction de répartition correspondante.
3. Calculer la fiabilité $R(t)$ et le taux de défaillance $\lambda(t)$ du système lorsque les deux éléments en *redondance passive*.

Exercice A.8 Sur un échantillon de 200 habitants d'une grande ville, 45% sont favorables à l'installation d'une entreprise. En raisonnant sur un intervalle de confiance à 95%, cela contredit–il l'hypothèse qu'un habitant sur deux y soit favorable ? Justifiez votre réponse.

Exercice A.9 Pour un système en parallèle (redondance active) comportant n composants identiques non réparables dont la durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre λ, montrer que la durée de vie moyenne vaut

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).$$

On fera appel à un processus de naissance et/ou de mort.

Exercice A.10 On considère un système à *redondance passive* formé de n éléments en parallèle non réparables, chacun d'eux ayant des caractéristiques identiques. La durée de bon fonctionnement d'un élément suit une loi uniforme sur l'intervalle de temps $[0,a]$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Soit $T_1,T_2,\cdots,T_n$ les durées de vie respectives de chacun des éléments du système et T la durée de bon fonctionnement du système complet. Exprimer la variable aléatoire T en fonction des v.a. $T_1,T_2,\ldots,T_n$. Calculer la moyenne et l'écart–type de T en fonction de a.
2. Justifier, lorsque n est grand, une approximation de la loi suivie par T par une loi normale.
3. On effectue une expérience pour $n = 100$ où le système fonctionne correctement pendant 100 jours. Calculer une estimation du nombre a et donner un encadrement de cette estimation valable à 95%.

Exercice A.11 On considère une variable aléatoire X à valeurs dans l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$. On note $p_k = \mathrm{Prob}\,\{X = k\}$. On suppose que la transformée en z (voir poly) de la suite p_k vaut

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, z^k = \frac{1}{1 + a(1-z)}$$

où a est un paramètre réel strictement positif.

1. Calculer la moyenne $\mathrm{E}(X)$.
2. Montrer que la valeur de la variance est $\mathrm{Var}(X) = a(a+1)$.
3. Vérifier que $f(z) = \dfrac{1}{1+a} \times \dfrac{1}{1 - \frac{az}{1+a}}$. En déduire la valeur de p_k en fonction de a et de k.

Bibliographie

[1] B. Baynat. *Théorie des files d'attente.* Hermes Sciences Publications, Paris, 2000.

[2] T. Rivest, C. Leiserson, and R. Rivest. *Introduction à l'algorithmique.* Dunod, Paris, 1994.

[3] A. Ruegg. *Processus stochastiques*, volume 6. Presses Polytechniques Romandes, 1989.

[4] G. Saporta. *Théories et méthodes de la statistique.* Institut Français du Pétrole, 1978.

[5] A. Villemeur. *Sûreté de fonctionnement des systèmes industriels*, volume 67. Eyrolles.